Control 1
FI34A

Prof: Simon Casassus
Ayudante: Francisco Madariaga

I Paradoja de los gemelos.

Sean A y B dos gemelos, cada uno con un sistema de referencia inercial S y S'. Supongamos que en $t = t' = 0$, los orígenes de S y S' conciden, y B sube a un cohete que acelera muy rápidamente (de manera a poder despreciar el tiempo de aceleración en comparación con la duración total del viaje) y luego viaja con velocidad constante $v_\circ$ hacia la estrella αCen. Una vez lleguado a la estrella, B pone en marcha el cohete de manera a acelerar (muy rápidamente) para frenarse y devolverse, con la misma rapidez $v_\circ$. A se queda en reposo en su sistema inercial. En este problema queremos comparar las duraciones del viaje según A y B, T_A y T_B.

Durante toda la travesía A manda señales a B cada τ segundos, a traves de rayos de luz. Cada señal es un caracter, de manera que el largo total del mensaje consiste de $N_A = T_A/\tau$ caracteres.

1. Use un diagrama de Loedel para demostrar que B recibe los caracteres con un período dado por
$$\tau' = \tau\sqrt{\frac{c + v_\circ}{c - v_\circ}}, \tag{1}$$
que es la fórmula para el efecto Doppler relativista.
Ayuda: use un diagrama correspondiente a la situación del viaje de ida, y dibuje dos rayos de luz, uno partiendo del orígen en $t = 0, x = 0$ (cuando los dos sistema S y S' coinciden, o sea donde las líneas de mundo de A y de B se cruzan), y otro partiendo de $(t = \tau, x = 0)$ (o sea en la linea de mundo de A), y ver donde el segundo rayo de luz intercepta la linea de mundo de B (o sea el evento $(x' = 0, t' = \tau')$ en la linea de mundo de B correspondiente a la recepción de la señal). Se relacionan τ y τ' usando un poco de geometría euclideana.

2. Cuantas señales N_B recibe B en total, hasta su vuelta a la tierra, o sea sumando las de ida y las de vuelta?

3. Igualar N_A y N_B (el número de caracteres recibido por B debe ser igual al número de caracteres enviado por A), y deducir la relación entre T_A y T_B. Al encontrarse nuevamente A y B, quién será el más viejo?

4. Considere ahora la situación inversa: B envía las señales con un período τ', y $N_B = T_B/\tau'$.

a) Cual es el período τ de recepción de las señales cuando A ve que B se aleja? Y cuando A ve que B se acerca?
Ayuda: escribir la Ecuación 1, sin volver a deducirla, para el caso en que la fuente esta en B y la recepción en A.

b) Como B se aleja de A con velocidad contante $v_\circ$, para A la estrella se encuentra a una distancia $\frac{1}{2}v_\circ T_A$. Explicar porqué A **ve** a B alejarse durante $\frac{1}{2}T_A + \frac{1}{2c}v_\circ T_A$. ¿ Durante cuanto tiempo A **ve** a B acercarse?

c) Igualar N_A y N_B, y mostrar que se recuperan las mismas conclusiones que si A emite las señales.

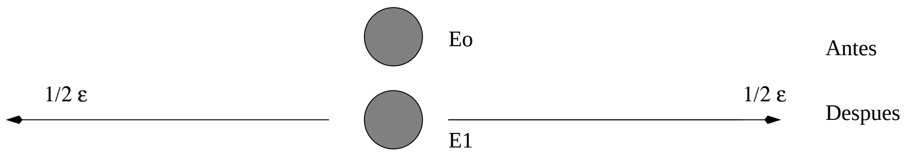
5. a) Considerar las diferencias de coordenadas de dos eventos que le ocurren a B, $(\Delta x'_B, \Delta t'_B)$ y $(\Delta x_B, \Delta t_B)$, en los sistemas S' (ligado a B) y S (ligado a A). Usando las transformaciones de Lorentz, mostrar que $\Delta t'_B = \Delta t_B/\sqrt{1-(v_\circ/c)^2}$.

   b) Inversamente, considere ahora las diferencias de coordenadas de dos eventos que le ocurren a A, $(\Delta x'_A, \Delta t'_A)$ y $(\Delta x_A, \Delta t_A)$ (estos eventos podrían ser cuando A y B se separan y vuelven a coincidir). Mostrar que $\Delta t_A = \Delta t'_A/\sqrt{1-(v_\circ/c)^2}$.

6. Esta es la paradoja: la dilatación del tiempo pareciera ser aplicable simétricamente para A y B. Visto desde la perspectiva de B, la diferencia temporal entre los eventos de su partida y su vuelta es menor para B que para A. Pero es al revés para A. La paradoja se resuelve porque el argumento derivado de las transformaciones de Lorentz tiene una falla; el principio de relatividad no se aplica. Porqué?

II Equivalencia masa-energía.

Sea un cuerpo estacionario con energía inicial E_0 en un sistema S, en el cual el cuerpo está en reposo, y E'_0 en otro sistema S', en movimiento con respecto a S con una velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$. Suponemos que el cuerpo emite dos fotones en direcciones $+\hat{x}$ y $-\hat{x}$, con la misma energía $\frac{\epsilon}{2}$. Sean E_1 y E'_1 las energía del cuerpo en S y S', después de la emisión de los fotones. La masa en reposo del cuerpo antes y después de la emisión es M_0 y M_1. La situación antes y después de la emisión estan dibujadas en la siguiente figura:



En este problema queremos deducir la relación entre la energía total del cuerpo y su masa, suponiendo que la mecánica Galileana es válida en el límite $\frac{v}{c} \ll 1$. Supondremos que

$$\epsilon/2 = h\nu, \tag{2}$$

en que $\epsilon/2$ es la energía de uno de los fotónes, h es la constante de planck y ν es la frecuencia del fotón, que está relacionada con su período por $\nu = 1/\tau$. Para efecto de este problema, considere que el fotón es una señal que se emite con período τ, al igual que en el Problema I.

1. Usando la Ec. 1, calcular las frecuencias ν'_- y ν'_+ en S' de los fotones viajando hacia $+\hat{x}$ y $-\hat{x}$.

2. La conservación de la energía se escribe $E_0 = E_1 + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon$ en S. Escribir la conservación de la energía en S', o sea en función de E'_0, E'_1, ϵ y v (usar la Ec. 2).

3. La diferencia $K'_0 = E'_0 - E_0$ debe ser la energía cinética inicial del cuerpo en S' (porque E_0 es la energía inicial en reposo). De la misma manera, como E'_1 es la energía en reposo del cuerpo después de la emisión, $K'_1 = E'_1 - E_1$ debe ser la energía cinética final del cuerpo en S'. Escribir $K'_0 - K'_1$ en función de ϵ y v.

4. Demostrar que cuando $\frac{v}{c} \ll 1$,

$$K'_0 - K'_1 \sim \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{c^2}v^2.$$

5. Cuando $\frac{v}{c} \ll 1$, la energía cinética se aproxima al valor Galileano. Escribir K'_0, K'_1 (fundamentando las expresiones) y demostrar que

$$\epsilon = \Delta M \ c^2,$$

   donde $\Delta M = M_0 - M_1$.

De esta relación Einstein concluyó "Si un cuerpo emite una cantidad de energía ϵ en forma de luz, su masa disminuye en ϵ/c^2" (en vez de la Ec. 2, usó propiedades de las ondas electromagnéticas conocidas en la epoca).

III Transformaciones de Lorentz.

Deducir las transformaciones de Lorentz usando una (o dos, para puntos extras), de las siguientes maneras:

- Geométricamente, usando un diagrama de Loedel.
- Analíticamente, considerando el siguiente experimento: Una señal radio es emitida en todas direcciones desde el origen de S y S', que coinciden en $t = 0$. El rayo de luz es descrito por $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ en ambos sistemas.

Suponer que el orígen de S' (en movimiento con respecto a S), tiene coordenas $x' = 0$, $x = ut$, y suponer además que $y = y'$ y $z = z'$. Fundamentar el desarrollo.