Control 2
FI34A, Sección 03

Prof: Simon Casassus
Ayudante: Francisco Madariaga

Relaciones útiles:

En el espacio vacío,

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} = 0, &\qquad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad (1)\\
\nabla \cdot \vec{B} = 0, &\qquad c^2 \nabla \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\\
\vec{S} = \epsilon_\circ c^2 \vec{E} \wedge \vec{B}, &\qquad u = \frac{1}{2}\epsilon_\circ \|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_\circ c^2 \|\vec{B}\|^2.
\end{aligned}
$$

Fórmula de Larmor:

$$P_{\text{tot}} = \frac{1}{6\pi c}\mu_\circ \left\| \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{d} \right\|^2, \qquad (2)$$

con $\mu_\circ = 4\pi\, 10^{-7}$, y $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ es el dipolo electrico asociado a un conjunto de cargas q_i.

I Superposición de dos ondas propagandose en sentido opuesto.

En este problema consideramos el espacio reportado al triedro directo $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.

1. Escribir expresiones, en notación compleja, para los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ de dos ondas con el mismo módulo $\|\vec{E}_\circ\|$, mismo vector de onda k y misma frecuencia ángular ω (pulsación), pero propagandose en sentido opuesto segun el eje $\hat{x}$ ($\vec{E}_1$ según $+\hat{x}$).
2. Para cada una de estas ondas, determinar,
   a) los campos magnéticos $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$,
   b) los vectores de Poynting $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$.
   c) las densidades de energías u_1 y u_2.
3. Caracterisar en notación compleja la onda resultante de la superposición de estas dos ondas, $\vec{E}_3$ y $\vec{B}_3$. Luego dar las expresiones reales de $\vec{E}_3$ y $\vec{B}_3$, y mostrar que $\mathrm{Re}\vec{E}_3$ se factorisa de esta forma: $\|\vec{E}_3\| = f(t)g(x)$.
4. Calcular el vector de Poynting $\vec{S}_3$ de la onda resultante. ¿Cual es la potencia media (promedio temporal) transportada por esta onda? Comparar con la pregunta 2.
5. Calcular la densidad de energía de la onda resultante, comparar con 2 y explicar el resultado.

II Emisión de plasma en la ausencia de campo magnético.

Consideramos un gas de e^- y $\mathbf{p}$ libres (hidrógeno ionisado en el espacio interestelar).

1. ¿Un e^- libre, sin interactuar con ninguna otra partícular, irradía (explicar)? ¿ Bajo que condiciones los e^- y los $\mathbf{p}$ que componen el plasma irradian? ¿Cuando se dan estas condiciones?

2. Demostrar que en la aproximación dipolar los encuentros entre electrones no producen radiación (use la fórmula de Larmor, recordando que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{d} = -e\sum v_i$, en que la suma sólo se extiende a dos electrones de igual masa). Explicar porque los encuentros entre e^- y $\mathbf{p}$, en cambio, si producen radiación.

3. Los encuentros entre e^- y $\mathbf{p}$ son muy breves, durante la mayor parte de la interacción el e^- y el $\mathbf{p}$ no se sienten. Argumentar porque esto implica que el espectro de frecuencia C_ω de la radiación emitida en encuentros entre e^- y $\mathbf{p}$ es prácticamente plano (o sea que C_ω no depende de $\omega = 2\pi\nu$). Ayuda: demostrar que para el par de Fourier P_{tot} (potencia irradiada) y C_ω, relacionados por,

$$P_{\mathrm{tot}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, C_\omega \exp(i\omega t),$$

$$C_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, P_{\mathrm{tot}}(t)\exp(-i\omega t),$$

se cumple que si $P_{\mathrm{tot}}(t)$ es una gaussiana de la forma

$$P_{\mathrm{tot}}(t) = P_\circ \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(t-t_\circ)^2}{\sigma_t^2}\right),$$

entonces C_ω también es gaussiano, con un ancho σ_w, y se cumple que

$$\sigma_\omega \sigma_t = \mathrm{Constante}.$$

O sea que si σ_t es arbitrariamente chico, C_ω es arbitrariamente grande. Concluir.

III

1. Presión de radiación

   a) Una onda electromagnética plana, con intensidad específica (módulo del vector de Poynting) $I_\circ$ incide sobre una pantalla negra. Cual es la presión egercida por la onda sobre la pantalla?

   b) La onda incide ahora sobre un espejo. Cual es la presión de radiación en este caso?

2. Sandwich de tres polarizadores.

   Luz polarizada circularmente, con intensidad $I_\circ$ incide sobre un sandwich de tres polarizadores. El primer y el tercer polarizador estan cruzados, i.e. sus ejes transmisores estan a 90° uno de otro. El polarizador del medio forma un ángulo θ con el primer polarizador. Demostrar que la intensidad de salida es

$$\frac{1}{2} I_\circ \cos^2\theta \sin^2\theta\ .$$