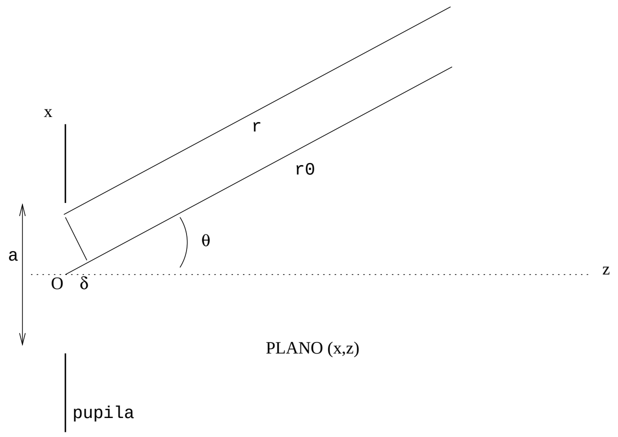
FI34A-Sección 3 | **Control 3** | Prof: Simón Casassus
10 Junio 2002 | 3 horas | Ayudante: Francisco Madariaga

I Resolución angular limitada por difracción.

Modelamos el ojo humano estudiando la difracción en infinito de una onda plana monocromática por la pupila, una perforación cuadradra de lado a en una pantalla opaca. Los puntos de la apertura se comportan como fuentes secundarias. Una fuente secundaria en la apertura, coincidente con el punto $M(x, y)$, irradía ondas esféricas $d\vec{E} \propto \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)\right]$, que observamos en un punto P a una distancia $r = |\mathrm{MP}|$, en dirección $\hat{r}$, con $r \gg a$. La dirección $\hat{r}$ subtiende un ángulo θ con el eje z en el plano $(\hat{x}, \hat{z})$ (que es el plano de la figura), y θ_y con el eje z en el plano $(\hat{y}, \hat{z})$. Para simplificar, estudiaremos el caso en que $\theta_y = 0$, $\theta = \theta_x$.



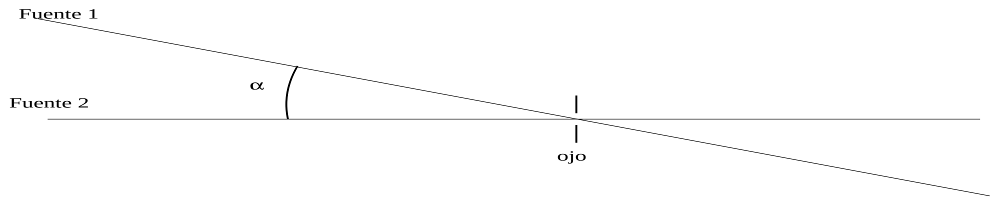
1. Escribir la diferencia de camino $k\delta = \vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$, en función de x, θ, y de la distancia del punto de observación al orígen de la pupila $r_0 = \mathrm{OP}$. El punto de observación P esta en infinito (o sea r_0 y r son paralelos, ver Figura), y $\vec{k} \parallel \vec{r}$.

2. Dar la expresión del elemento de amplitud compleja $d\vec{E}$ de la onda difractada en la dirección $\hat{r}$ por un elemento de superficie dS en la vecindad de M, como $dE \propto\ dS\ f(\delta, r_0, t)$ (i.e. determinar f).

3. Luego integrar en x y deducir la amplitud compleja de la onda difractada por la apertura en dirección $\hat{r}$, y demostrar que el campo de intensidad en infinito es: $I = \vec{E}\cdot\vec{E}^\star \propto \left[\sin(\frac{\pi}{\lambda}a\sin(\theta))\right]^2 / \left[\frac{\pi}{\lambda}a\sin(\theta)\right]^2$

4. En el resto del problema, supondremos que $\sin\theta \sim \theta$ ¿ A que distancia angular del eje z se encuentra el primer mínimo de intensidad?

5. Consideramos ahora dos ondas planas monocromáticas, incoherentes, incidentes sobre este modelo de ojo (podría tratarse de los focos de un auto). Consideramos que dos fuentes son separables si, al menos, el máximo de difracción de una fuente coincide con el primer mínimo de la otra. ¿ Cual es el ángulo α mínimo que puede resolver el ojo, en función de λ y a?

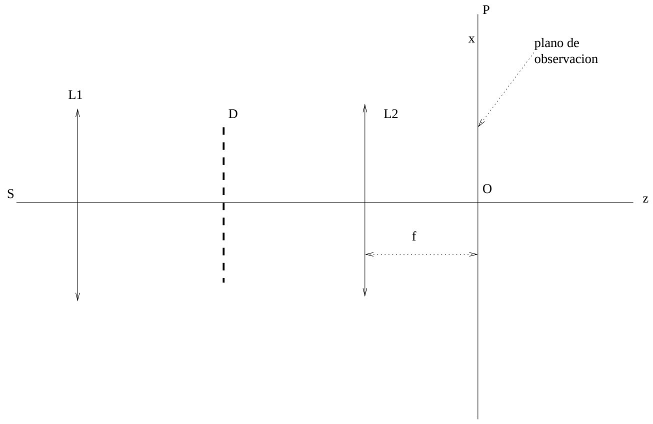


6. Hoy en día existen telescopios cuya resolución angular, en el infrarrojo (a $\lambda \gtrsim 1\mu$m), esta limitada solo por difracción (en el visible domina la turbulencia atmosférica).

   (a) ¿ Cual sería aproximadamente el diametro mínimo de un telescopio para poder estudiar objetos en $\lambda = 1\mu$m cuyo tamaño angular es de 0.1 arcsec (206265 arcsec = 1 rad)?

   (b) ¿ Y cual sería el diámetro mínimo de una antena parabólica para resolver 1 arcsec en las ondas radio, a $\lambda = 21$ cm? Hay una dificultad práctica, ¿que solución le propone?

II Decomposición de luz blanca por una red de difracción.



Construimos el montaje clásico de estudio de difracción en infinito. La fuente S es una rendija infinitamente delgada, normal al plano de la Figura, y ubicada en el plano focal de una lente convergente L_1 centrada en el eje óptico. Observamos el fenómeno de difracción en P, el plano focal de una lente L_2, centrada en el eje óptico del montaje, y cuya distancia focal es f. En todo el problema, nos limitaremos al caso de rayos pocos inclinados sobre el eje óptico ($\sin\theta \sim \theta$). Entre las dos lentes L_1 y L_2 colocamos una red por transmisión D, compuestas por N rendijas paralelas a la rendija fuente S, en que el ancho a de las rendijas es despreciable frente a sus separación b: solo consideramos el fenómeno de interferencias. La rendija fuente y las rendijas de D tienen largo infinito, y sólo estudiaremos la intensidad en función de x, la distancia de un punto de P a la imagen geométrica O de la fuente S (en la intersección del eje óptico y el plano de observación). . El propósito de L_1 es asegurar que la radiación incidente en D es una onda plana, con $\vec{k} \parallel \hat{z}$. L_2 asegura que rayos paralelos, que forman un ángulo θ con el eje óptico, convergen en un punto de P tal que $x = f\theta$. El ancho total de D es $L = 50\,\mathrm{mm}$, $b = 1\ \mu$m, $f = 100$ mm.

1. La fuente luminosa S es monocromática de longitud de onda λ. Demostrar que, para un punto $M(x)$ del plano de observación, el campo eléctrico suma de los campos eléctricos asociados a las N rendijas es $\vec{E} \propto (1 - \exp\left[-iNb\frac{2\pi}{\lambda}\sin(\theta)\right])/(1 - \exp\left[-ib\frac{2\pi}{\lambda}\sin(\theta)\right])$, en que $\theta = x/f$.

2. Demostrar, usando $I = \vec{E}\cdot\vec{E}^\star$, que el campo de intensidad en P es:
   $I \propto \left[\sin(Nb\frac{\pi}{\lambda}\sin(\theta))/\sin(b\frac{\pi}{\lambda}\sin(\theta))\right]^2$.

3. Determinar el ancho a zero intensidad de las imagenes de la fuente S en el plano de observación (o sea el ancho de las líneas de interferencias).

4. la fuente S emite dos radiaciones de longitud de ondas vecinas λ y $\lambda + \Delta\lambda$. Describir el fenómeno observado. Consideramos que dos imagenes de S en el plano de observación son distintas si, a lo menos, un máximo principal de intensidad luminosa correspondiente a λ coincide con el mínimo a zero intensidad de $\lambda + \Delta\lambda$ (o inversamente). Deducir el poder de separación $R = \lambda/\Delta\lambda$ de la red de difracción (incluir el valor numérico).

5. Observamos únicamente en el primer orden de interferencia. Determinar el intervalo espectral $\Delta\lambda$ correspondiente, en el plano focal de L_2, a una distancia Δx de los máximos de interferencia.

6. el montaje descrito en este problema constituye un esquema básico de un espectrógrafo de red; la cantidad $\Delta\lambda/\Delta x$ caracterisa la dispersión del sistema. La dispersión se expresa en general en Angström por mm. Determinar, en Å/mm, la dispersión del montaje (1Å$= 10^{-10}$ m, incluir el valor numérico).

7. Usamos ahora una fuente de luz blanca, que emite en todo el rango visible, desde $\lambda_1 = 0.4\ \mu$m hasta $\lambda_2 = 0.7\ \mu$m. Determinar $x(\lambda_1)$, $x(\lambda_2)$, y el ancho del espectro $x(\lambda_2) - x(\lambda_1)$ para los tres primeros ordenes (dar los valores numéricos).

8. Que dificultad vamos a encontrar en la interpretación de los espectros si observamos en ordenes superiores al primero? Ayuda: Hay dos razones, una esta ligada con que si la red es realista, a no es despreciable delante de b, y la otra esta ligada al ancho de cada orden.