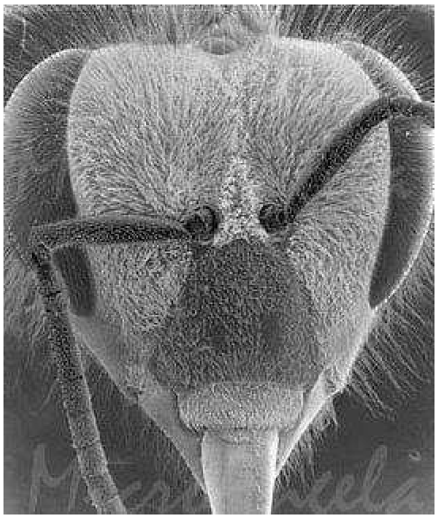
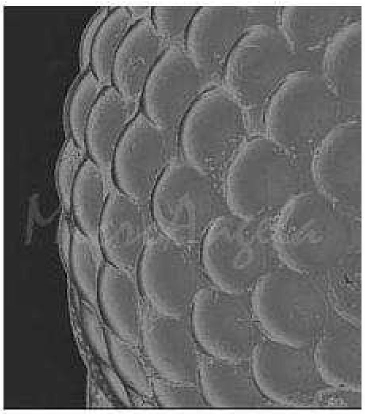
FI34A-Sección 2 **Examen** Prof: Simón Casassus
2 Julio 2003 3 horas Ayudantes: Cesar Fuentes, Diego Muñoz

Relaciones útiles:

Para ángulos $\theta \ll 1$ rad, $\sin(\theta) = \theta$. $\hbar = 6{,}62\ 10^{-34}/2\pi$ J s^{-1}, $c = 3\ 10^8$ m s^{-1}.
Patrón de difracción: $I = I_\circ \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin(\theta)\right) / \left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin(\theta)\right)\right]^2$.
Patrón de interferencias: $I = 2I_\circ(1 + \cos(k\delta))$, con $k = 2\pi/\lambda$ y δ diferencia de camino.
$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$. $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. $\frac{-\hbar^2}{2m}\partial^2\psi(x)/\partial x^2 + V\psi = E\psi$.





I Ojo humano versus ojo de insecto

1. El ojo humano consiste de una perforación cuadra en un pantalla opaca (la pupilla), seguida en el camino óptico por un lente convergente (el critalino), y de una pantalla en el plano focal (la retina). La distribución espacial de intensidad en la pantalla es la imagén producida por el ojo (analisada en el cerebro), y está limitada por difracción.

   a) ¿ Qué quiere decir que la resolución ángular del ojo está limitida por difracción? Defina un criterio de resolución ángular (se recomienda el criterio de Rayleigh).

   b) Estime 'al ojo' los números que necesite, y calcule la resolución ángular del ojo humano en el azul, con $\lambda = 4000$Å. De su respuesta en minutos de arco (60 arcmin=1 deg).

2. El ojo segmentado de un insecto es un casquete esférico con detectores todos idénticos distribuidos regularmente en su superficie (las omatidias) (ver figura). Cada detector recibe radiación proveniente del ángulo que subtiende desde el centro de la esféra, con radio r. La resolución del ojo de la abeja esta limitada en parte por el número de sus segmentos. Si δ es el diametro de un segmento, y $\delta \ll r$, cual es el ángulo en radianes α_s que subtiende cada segmento?

   a) Al aumentar el número de segmentos disminuye su diámetro δ. Pero en concreto cada segmento se comporta como una perforación en una pantalla opaca - también se producirá difracción a la entrada en el segmento. ¿ Cual es la resolución ángular de un segmento en el azul, $\lambda = 4000$ Å? Use el mismo criterio que en el punto 1*a*.

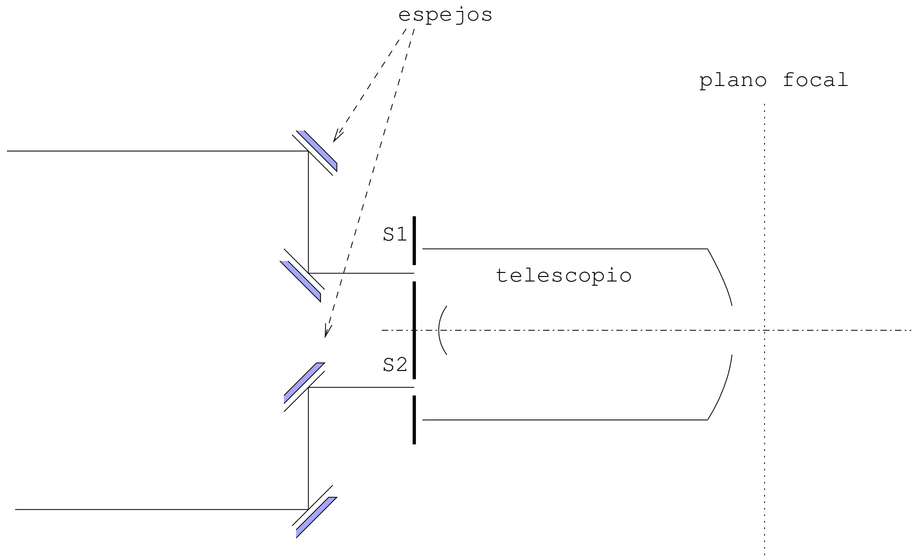
b) La resolución angular total del ojo de insecto es la suma la resolución angular de cada factor, $\alpha_T(\lambda, \delta) = \alpha_{\mathrm{s}} + \alpha_{\mathrm{dif}}$. Grafique $\alpha_T(\delta)$.

c) La Evolución de las especies favoreció las abejas con el ojo óptimo, de manera que el tamaño de los segmentos es óptimo. Cual es la resolución ángular en el azul de un ojo de abeja? .

d) Hay un error en el desarrollo de este problema tal como está expuesto en Feynman *et al.* Vol. I: En realidad $\alpha_T(\lambda, \delta) = \sqrt{\alpha_{\mathrm{s}}^2 + \alpha_{\mathrm{dif}}^2}$. Muestre que este error no afecta el resultado del punto $2c$.

e) ¿ Cual es el mejor ojo, el del insecto o el del humano? ¿ Le conviene al insecto adoptar un ojo humano a escala, que quepa en su cabeza?

II Interferómetro estelar de Michelson



Gracias al dispositivo que se describe a continuación, Michelson logró determinar la separación angular de estrellas dobles cercanas - con separaciones del orden de 0.01 arcsec (1 arcsec=(1/60) arcmin = (1/3600) deg).

1. Se coloca en la entrada de un telescopio una pantalla con dos agujeros separados por a. Consideremos una estrella sola que emite radiación quasi-monocromática con $\lambda = 0{,}55$ μm. Para todo efecto, la estrella es una fuente puntual. Calcular el patrón de interferencia en infinito, o sea en función del ángulo θ desde el eje óptico del telescopio, y deducir la separación angular entre dos máximos de intensidad (i.e. repita el desarrollo de las rendijas de Young).

2. Consideramos ahora la observación de una estrella doble, con una separación θ entre las dos componentes.

   a) Las dos componentes emiten en la misma frecuencia, tienen la misma luminosidad, pero son incoherentes de manera que se sobreponen los patrones de interferencia: se suman las intensidades en lugar de interferir, ¿ Por qué?.

b) Considere que una componente esta centrada con el eje del telescopio, mientras la otra esta corrida en un ángulo α. Muestre que el patrón de interferencia es el mismo que si estuviese centrada, pero trasladado en α - para ello explique por qué la diferencia de camino entre las dos rendijas se anula con $\theta = \alpha$.

c) Se constata que al aumentar a la iluminación en el plano focal del telescopio (o en infinito), pasa a ser uniforme, y que al seguir aumentando a se recupera el patrón de interferencias, y asi cíclicamente. Mostrar que entonces es posible deducir α, usando dos o más valores de a.

d) En realidad Michelson uso 4 espejos, como se muestra en la figura. Cual sería el interés? Que distancia entre los dos espejos mas alejados se necesita para lograr observar separaciones del orden de 0.01 arcsec?

III Desarrollo histórico de la teoría del átomo de hidrógeno

1. Explique en qué consitió el experimento de Rutherford, y su importancia en estructura atómica.

2. Describa dos experimento claves para el establecimiento de $E = h\nu$.

3. ¿ Por qué para un fotón $p = \hbar k$?

4. De Broglie supuso que $E = h\nu$ y $p = \hbar k$ tambien se aplica al electrón del átomo de hidrógeno, y asoció una onda con el electrón. Demuestre que esto implica que el momemtum angular del electron está cuantisado, $L = n\hbar$.

5. En mecánica clásica el electrón tiene energía $E(a) = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_\circ a}$. Usando $L = n\hbar$, y $mv^2/r = e^2/4\pi\epsilon_\circ r^2$, demuestre que el radio a de la órbita del electrón correspondiente al nivel de energía mas bajo es: $a_\circ = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_\circ}{e^2 m}$, el radio de Bohr.

6. Usando el principio de incertidumbre en su caso límite, $\Delta p \Delta a = \hbar$, y $\Delta p = p$, $\Delta a = a$ (o sea $p = \hbar/a$, no olvide reemplazar p en $E(a)$), deduzca el radio a de la órbita del electrón para el estado fundamental (que corresponde al mínimo de energía, $dE(a)/da = 0$). Notar que se obtiene lo mismo que en la parte 5.

7. Explique brevemente porque debiera decaer el átomo de Bohr, según la física clásica, y porque la estabilidad del átomo de hidrógeno es consecuencia del principio de incertidumbre (o sea ponga en palabras sus ecuaciones).

8. Para puntos extras:

   a) resuelva la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno con simetría esférica, con una solución del tipo $\exp(-r/a)$, y demuestre que el radio más probable del estado fundamental es el radio de Bohr.

   b) Es dificil encontrar las soluciones para el átomo de hidrógeno con energías mayor a la fundamental. Pero para dar cuenta de que la ecuación de Schrödinger predice niveles cuantisados de energía, defina el potencial más simple que se le ocurra que tenga niveles discretos, y de los niveles de energías.