

Estrellas

Simón Casassus

Astronomía, Universidad de Chile

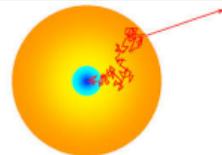
<http://www.das.uchile.cl/~simon>

- I Transfer Radiativo
- II Propiedades generales
- III Atmósferas estelares
- IV Interiores estelares
- V Evolución estelar

Part I

Transfer Radiativo

- 1 Ondas electromagnéticas
- 2 Intensidad específica
- 3 Transferencia radiativa
- 4 Radiación termal
- 5 Medios discretos
- 6 Opacidad y profundidad óptica
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

2 Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

3 Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

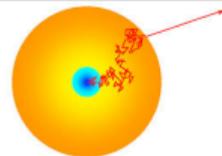
4 Radiación termal

5 Medios discretos

6 Opacidad y profundidad óptica

7 Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

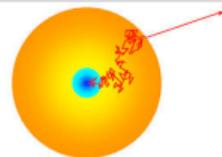
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

1.1- Ecuaciones de Maxwell

- En resumen, las ecuaciones que describen la electrodinámica son:

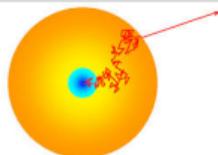
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

- Para medios lineales, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$.
- En el vacío, $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$.



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

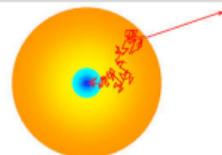
El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

1.1- Ecuaciones de Maxwell



- Usando las ecuaciones de Maxwell se puede demostrar que:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(-\vec{\nabla} \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right), \quad (5)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}. \quad (6)$$

- Vemos que, en el vacío, el campo electromagnético está descrito por la ecuación de ondas sin fuentes (i.e. homogénea).

Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

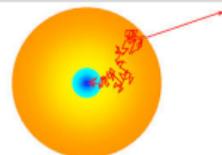
El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

1.1- Ecuaciones de Maxwell



- Otra consecuencia directa de las Ecuaciones de Maxwell es el Teorema de Poynting, o sea la conservación de la energía radiativa:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}. \quad (7)$$

con

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \quad (8)$$

y

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (9)$$

Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

2 Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus momentos

3 Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

4 Radiación termal

5 Medios discretos

6 Opacidad y profundidad óptica

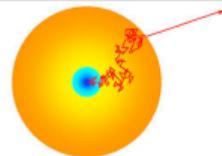
7 Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

1.2- Descomposición Espectral

- En ausencia de fuentes, si descomponemos

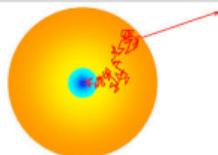
$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (10)$$

las ecuaciones de Maxwell dan

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2) \left\{ \begin{array}{c} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} = 0. \quad (11)$$

- Si ϵ y μ son reales, las soluciones de Ec. 11 son $\propto e^{\pm ikx}$, con $k = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$
- Definimos la velocidad de fase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$, donde $n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$ es el índice de refracción.
- Vemos que en general,

$$\left\{ \begin{array}{c} E_i \\ B_i \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{B}_i \end{array} \right\} e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad (12)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

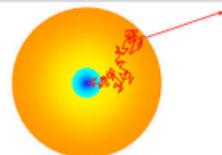
El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

1.2- Descomposición Espectral



- Reconocemos la solución de d'Alembert,

$$\begin{Bmatrix} E_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{B}_i \end{Bmatrix} e^{\pm ik(\hat{n}\cdot\vec{x} - v_\phi t)}, \quad (13)$$

donde cada componente i es de la forma $f(\hat{n}\cdot\vec{x} - v_\phi t) + g(\hat{n}\cdot\vec{x} + v_\phi t)$, y donde \hat{n} es la dirección de propagación.

- Usando las ecuaciones de Maxwell se puede llegar a $\hat{n}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0$, $\hat{n}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0$ y $\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c}\hat{n}\times\vec{\mathcal{E}}$.

Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

1.2- Descomposición Espectral

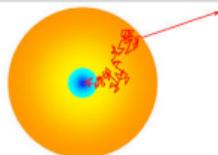
- Tanto u como \vec{S} dependen fuertemente del tiempo, incluso en sus componentes monocromáticas, con frecuencias que superan los MHz. En la práctica la medición de \vec{S} involucra un promedio temporal $\langle(\dots)\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt'(\dots)$.
- Se demuestra que, para componentes monocromáticas con frecuencia ν y $\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$,

$$\langle \vec{S}_\nu \rangle = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathcal{E}|^2 \hat{n}. \quad (14)$$

y similarmente,

$$\langle u_\nu \rangle = \frac{1}{4} (\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{B}^*) = \frac{\epsilon}{2} |\mathcal{E}|^2. \quad (15)$$

- Finalmente $\langle \vec{S}_\nu \rangle = v_\phi u_\nu \hat{n}$.



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

1.2- Descomposición Espectral

- La naturaleza corpuscular de la luz, descubierta por Planck y Einstein, nos dice que la energía radiativa está cuantizada, es decir

$$u_\nu = n_\nu h\nu, \quad (16)$$

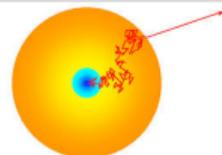
en que n_ν es la densidad de número de corpúsculos, i.e. “fotones”, con frecuencia ν . Los fotones no tienen masa.

- De la expresión relativista para la energía total de una partícula,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (17)$$

concluimos que el momentum asociado a un fotón es

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (18)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

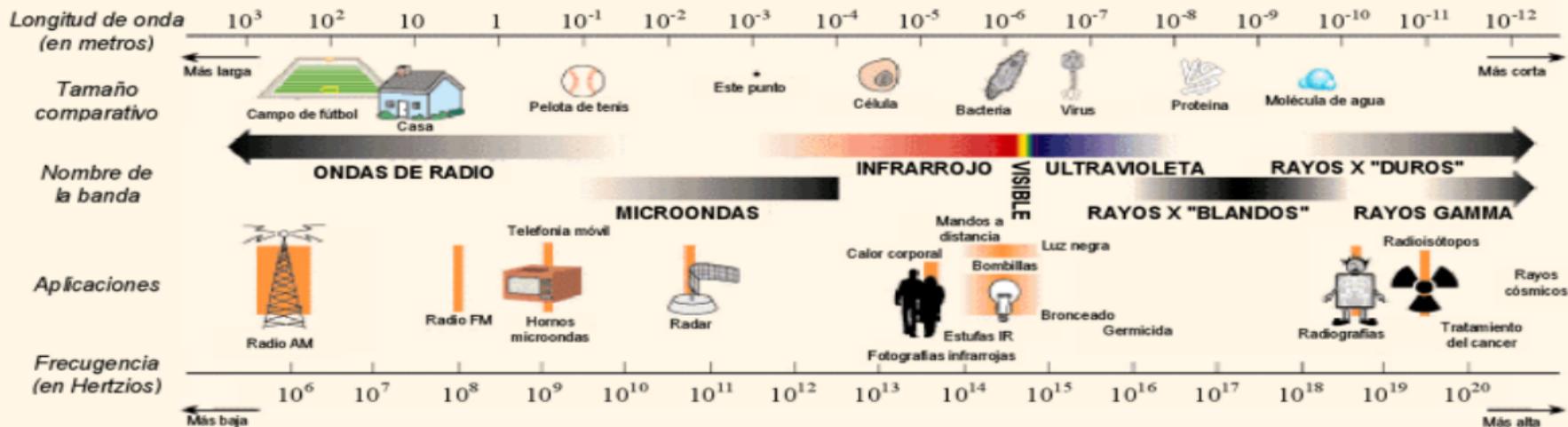
El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO



ESPECTRO VISIBLE



Color

Rojo

Naranja

Amarillo

Verde

Azul

Violeta

Longitud de onda (nm)

622 - 780

597 - 622

577 - 597

492 - 577

455 - 492

390 - 455

Frecuencia (10^{14} HZ)

3.84 - 4.82

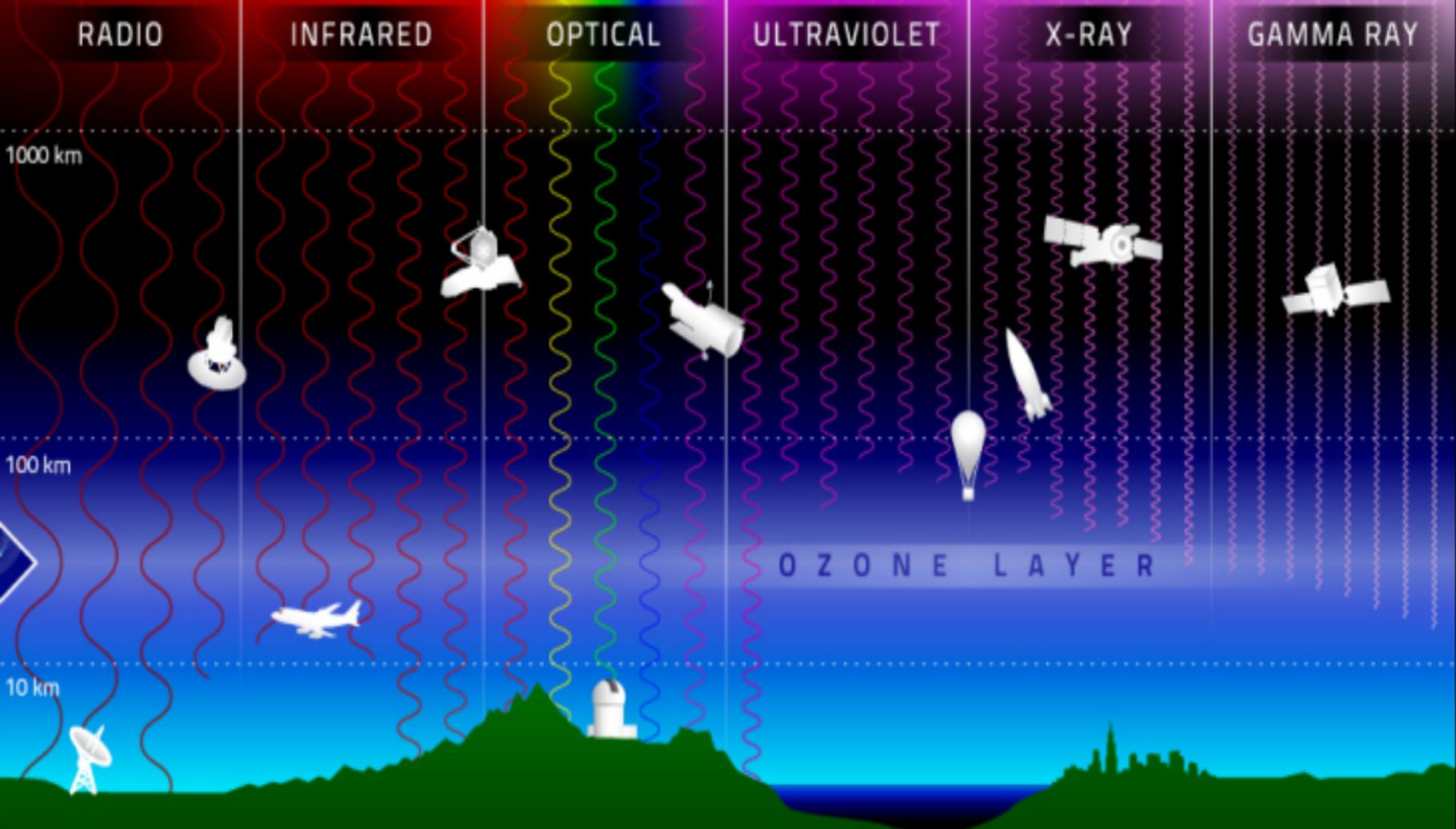
4.82 - 5.03

5.03 - 5.20

5.20 - 6.10

6.10 - 6.59

6.59 - 7.69



RADIO

INFRARED

OPTICAL

ULTRAVIOLET

X-RAY

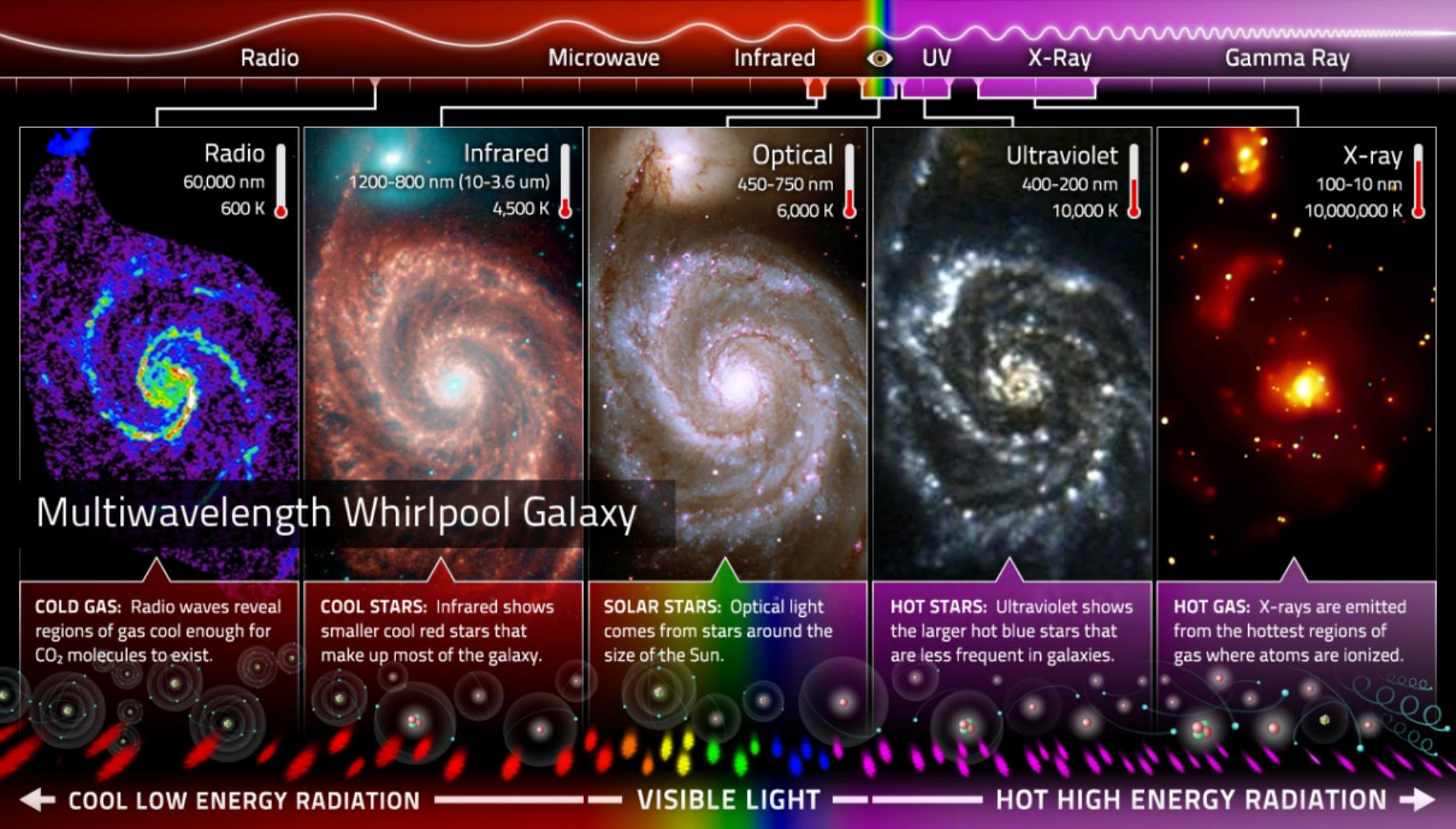
GAMMA RAY

1000 km

100 km

10 km

OZONE LAYER



Radio

Microwave

Infrared

UV

X-Ray

Gamma Ray

Radio

60,000 nm
600 K

Infrared

1200-800 nm (10-3.6 μ m)
4,500 K

Optical

450-750 nm
6,000 K

Ultraviolet

400-200 nm
10,000 K

X-ray

100-10 nm
10,000,000 K

Multiwavelength Whirlpool Galaxy

COLD GAS: Radio waves reveal regions of gas cool enough for CO₂ molecules to exist.

COOL STARS: Infrared shows smaller cool red stars that make up most of the galaxy.

SOLAR STARS: Optical light comes from stars around the size of the Sun.

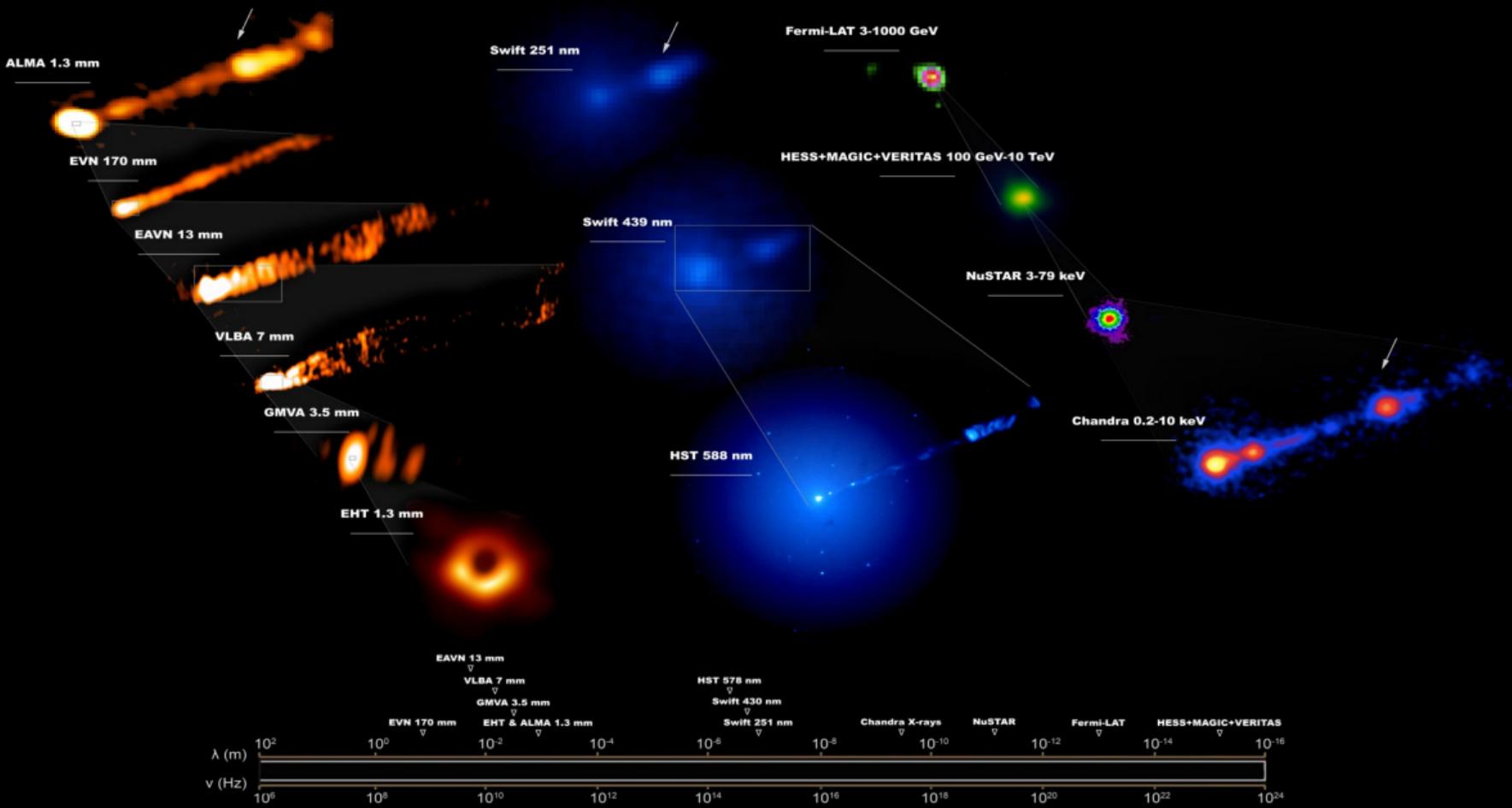
HOT STARS: Ultraviolet shows the larger hot blue stars that are less frequent in galaxies.

HOT GAS: X-rays are emitted from the hottest regions of gas where atoms are ionized.

← COOL LOW ENERGY RADIATION

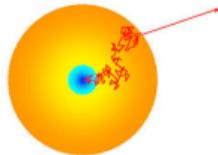
VISIBLE LIGHT

HOT HIGH ENERGY RADIATION →



Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

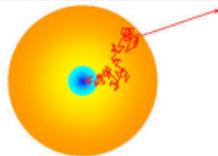
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

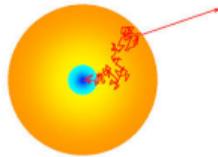
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

2.1-Óptica geométrica

- En óptica geométrica aproximamos el transporte de energía radiativa a lo largo de líneas rectas, o 'rayos', en dirección \hat{k} .
- Esto se puede hacer solo en el caso en que la longitud de onda λ es mucho mas chica que el tamaño típico 'a' de las sub-estructuras en el medio de propagación. En otras palabras, no se puede usar para describir la interacción de luz visible con átomos, ni tampoco para describir los fenómenos de difracción que son evidentes cuando $\lambda \gg a$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

2.1- Óptica geométrica

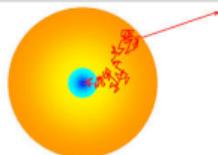
- Para ver lo anterior usamos el principio de incerteza para un rayo con $\hat{k} = \hat{z}$,

$$dx dp_x dy dp_y = p^2 dA d\Omega \gtrsim h^2, \quad (19)$$

y

$$dA d\Omega \gtrsim \lambda^2. \quad (20)$$

- Vemos que si $dA \sim \lambda^2$, entonces $d\Omega \sim 1$, y no hay restricción en la dirección.
- Entonces la teoría de transfer radiativo es aplicable solo cuando $\lambda \gg a$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

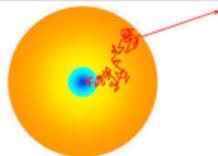
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

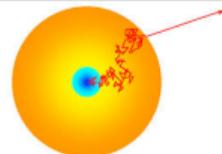
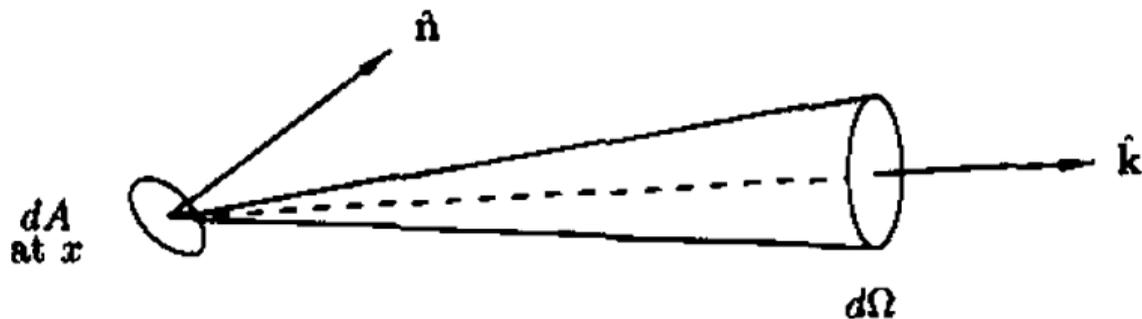
Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

2.2- Intensidad específica y sus momentos

- Si dE es la cantidad de energía radiativa que cruza un elemento de area $d\vec{A} = dA\hat{n}$ en la dirección \hat{k} , dentro de un ángulo sólido $d\Omega$, y con un rango de frecuencias $[\nu, \nu + d\nu]$, entonces la intensidad específica $I_\nu(\hat{k}, \vec{x}, t)$ está definida por:

$$dE = I_\nu(\hat{k}, \vec{x}, t) \hat{k} \cdot \hat{n} dA d\Omega d\nu dt. \quad (21)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

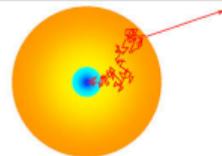
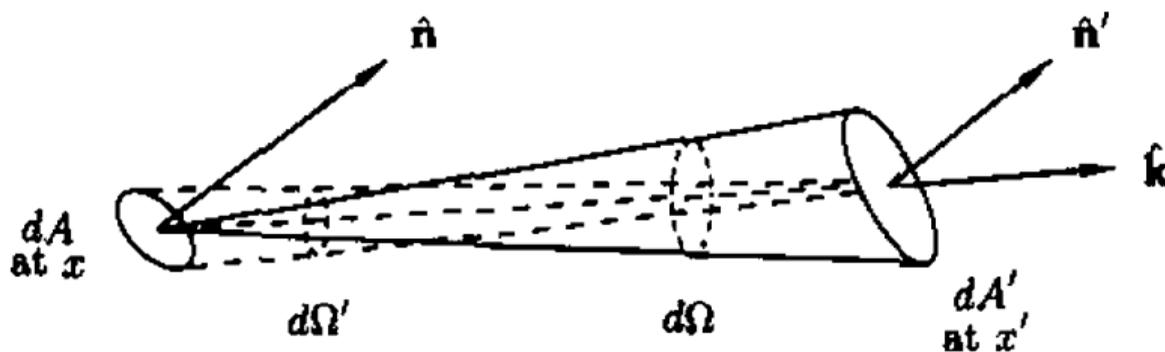
Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

2.2- Intensidad específica y sus momentos

- En la ausencia de interacción con materia, $I(\hat{k}, \vec{x})$ es constante para todo punto \vec{x} a lo largo del rayo \hat{k} . Demostración:



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

2.2- Intensidad específica y sus momentos

- La intensidad específica media en \vec{x} es simplemente

$$J_\nu(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega I_\nu(\hat{k}, \vec{x}). \quad (22)$$

En coordenadas esféricas, con $\mu = \cos(\theta)$,

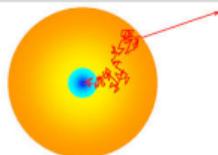
$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\mu=-1}^1 d\mu I_\nu(\mu, \phi) \quad (23)$$

- Para relacionar I_ν con u , la densidad de energía almacenada en el campo electromagnético, introducimos la densidad de energía que corresponde a fotones viajando en dirección \hat{k} , i.e. $u_\nu(\hat{k})$, tal que el flujo de energía que cruza un elemento de área $d\vec{A} = dA\hat{n}$ es

$$dE = u_\nu(\hat{k}) c \hat{k} \cdot \hat{n} dA d\Omega d\nu dt, \quad (24)$$

y comparando con la definición de $I_\nu(\hat{k})$ (Ec. 21),

$$u_\nu(\hat{k}) = \frac{I_\nu}{c}. \quad (25)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

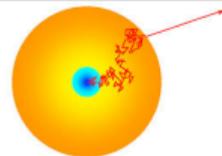
2.2- Intensidad específica y sus momentos

- La densidad de energía monocromática es entonces $u_\nu = \int d\Omega u_\nu(\hat{k})$, y

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (26)$$

y la densidad de energía bolométrica es

$$u = \int d\nu u_\nu. \quad (27)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

2.2- Intensidad específica y sus momentos

- El flujo neto en dirección \hat{n} y en el punto \vec{x} es

$$F_\nu(\hat{n}) = \int d\Omega I_\nu(\hat{k}, \vec{x}) \cos(\theta), \quad (28)$$

donde θ es el ángulo entre \hat{k} y \hat{n} . Con $\mu = \cos(\theta)$,

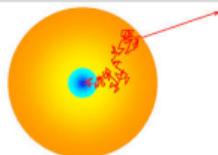
$$F_\nu(\hat{n}) = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\mu=-1}^1 d\mu \mu I_\nu(\mu, \phi). \quad (29)$$

- Dado que el momentum de un fotón con frecuencia ν es $p = \epsilon/c$, con $\epsilon = h\nu$, el momentum que cruza una área $d\vec{A} = dA\hat{n}$ en dirección $\hat{k} = \vec{p}_\nu / \|\vec{p}_\nu\|$ y proyectado según \hat{n} es

$$d\vec{p}_\nu \cdot \hat{n} = \frac{1}{c} \cos(\theta) dE_\nu \quad (30)$$

con el elemento de energía espectral

$$dE_\nu = I_\nu(\hat{k}, \vec{x}, t) \hat{k} \cdot \hat{n} dA d\Omega dt.. \quad (31)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

2.2- Intensidad específica y sus momentos

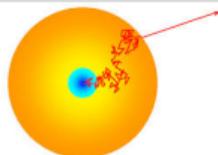
- Se define entonces la presión de radiación como la fuerza por unidad de área ejercida sobre el elemento de área $d\vec{A}$ si este absorbiese los fotones, con

$$\begin{aligned} P_\nu &= \int d\Omega \frac{d\vec{p}_\nu \cdot \hat{n}}{dA dt}, \\ &= \frac{1}{c} \int d\Omega \cos^2(\theta) I_\nu(\hat{k}, \vec{x}), \end{aligned} \quad (32)$$

o, en términos de $\mu = \cos(\theta)$,

$$P_\nu = \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\mu=-1}^1 d\mu \mu^2 I_\nu(\mu, \phi). \quad (33)$$

- Notar si usamos en vez una superficie reflectante que encierra la radiación, entonces el dominio en Ω es 2π , pero el momentum transferido a $d\vec{A}$ por cada fotón es $2\hat{n} \cdot \vec{p}_\nu$, y se recupera la misma expresión para P_ν .



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

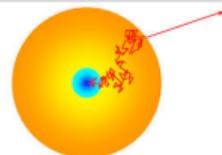
El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

2.2- Intensidad específica y sus momentos



- Problema: considere una esfera de radio R que emite una intensidad específica uniforme en su superficie B . Demuestre que el flujo en dirección \hat{r} a una distancia r del centro de la esfera es

$$F = \pi B \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (34)$$

El flujo en la superficie de la esfera es entonces $F = \pi B$.

Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica Óptica geométrica

Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

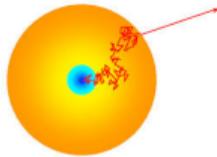
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

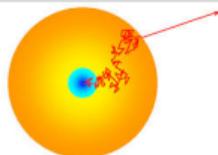
El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

3-Transferencia radiativa

- En presencia de materia, el campo de intensidad específica puede cambiar con posición (y tiempo),

$$\frac{\partial I_\nu}{c \partial t} + \hat{k} \cdot \vec{\nabla} I_\nu = \text{fuentes} - \text{sumideros}. \quad (35)$$

- Las fuentes corresponden a emisión de energía radiativa por materia, y también a reflexión en la dirección \hat{k} .
- Los sumideros corresponden a la absorción de energía por materia, y también a a reflexión fuera de la direction \hat{j} .
- La luz reflejada también se llama luz dispersada, o bien 'scattered light'.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

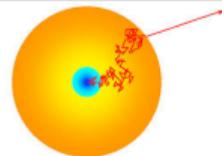
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

3.1-Emisión

- Un elemento de volumen $dV = ds dA$ emite una energía

$$dE = j_\nu d\nu dV dt d\Omega, \quad (36)$$

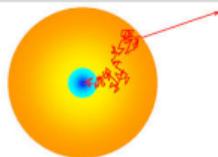
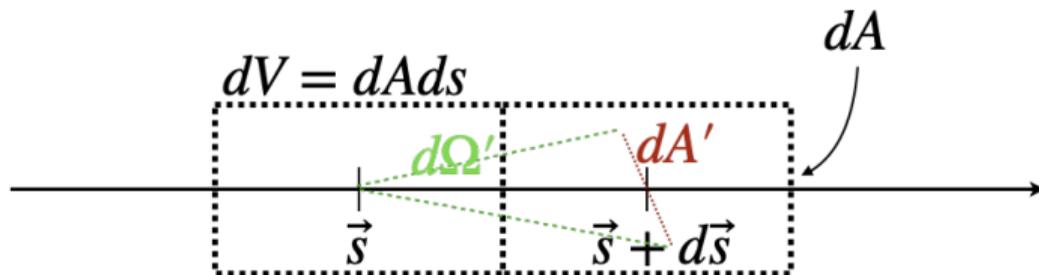
en dirección $d\Omega$, donde $j_\nu(\hat{k})$ es el coeficiente de emisión.

- De la definición de intensidad específica,

$$dE = dl_\nu(\hat{k}', \vec{s}, t) \hat{k}' \cdot \hat{n}' dA' d\Omega' d\nu dt, \quad (37)$$

para cualquier superficie $d\vec{A}'$ centrada en \vec{s} . Si elegimos $d\vec{A} = d\vec{A}'$, $\hat{k} = \hat{n} = \hat{s}$ y $d\Omega = d\Omega'$ entonces $\hat{k} \cdot \hat{n} = 1$. Entonces el aumento de l_ν debido a la contribución de dV en \vec{s} es

$$dl_\nu = j_\nu ds. \quad (38)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

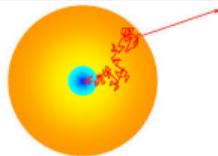
Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

3.2- Absorción

- Para absorción pura, sin scattering ni emisión, y si la absorción es causada por partículas infinitamente pequeñas que no se apantallan unas a otras dentro de un volumen $dV = dsdA$, esperamos que

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds, \quad (39)$$

- El coeficiente de absorción α_ν puede relacionarse con la sección eficaz efectiva σ_ν de los absorbentes. La energía total absorbida en el volumen dV es

$$dE = -I_\nu n \sigma_\nu dV d\Omega dt, \quad (40)$$

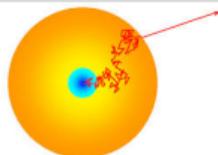
donde el signo menos da cuenta de que dE está siendo removido del campo de radiación.

- La diferencia en intensidad específica está dada por

$$dE = dI_\nu(\hat{k}, \vec{x}, t) dA d\Omega d\nu dt, \quad (41)$$

de manera que

$$\alpha_\nu = n \sigma_\nu. \quad (42)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión

Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

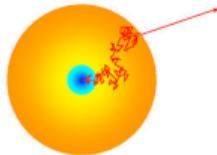
Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering**
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

3.3- Scattering

- La reflexión de fotones, en lugar de su absorción, también disminuirá la intensidad específica a lo largo de un rayo \hat{k} . En analogía con el caso de absorción pura, la correspondiente disminución en intensidad específica será

$$dl_\nu = -\alpha_\nu^{\text{sca}} I_\nu ds, \quad (43)$$

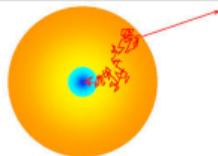
con $\hat{s} = \hat{k}$.

- Fotones que vienen de todas las direcciones también pueden ser reflejados hacia el rayo \hat{k} . Para describir la probabilidad de reflexión desde la dirección \hat{k}' hacia la dirección \hat{k} usamos la función fase $\Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}')$ (también llamada la densidad de probabilidad de scattering),

$$dl_\nu = \alpha_\nu^{\text{sca}} \oint \Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') I_\nu(\hat{k}') d\Omega' ds. \quad (44)$$

La función fase es normalizada y es simétrica:

$$\oint \Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') d\Omega' = 1 = \oint \Phi_\nu(\hat{k}', \hat{k}) d\Omega. \quad (45)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

3.3- Scattering

- La ecuación de transferencia radiativa completa en un medio continuo es entonces:

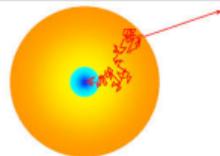
$$\frac{dl_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu^{\text{abs}} I_\nu - \alpha_\nu^{\text{sca}} I_\nu + \underbrace{\alpha_\nu^{\text{sca}} \oint \Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') I_\nu(\hat{k}') d\Omega'}_{j_\nu^{\text{sca}}}, \quad (46)$$

con $\hat{k} = \hat{s}$.

- Juntando términos, la Ec. 46 también se puede escribir

$$\frac{dl_\nu}{ds} = j_\nu^{\text{total}} - \alpha_\nu^{\text{total}} I_\nu, \quad (47)$$

con $j_\nu^{\text{total}} = j_\nu + j_\nu^{\text{sca}}$ y $\alpha_\nu = \alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}}$.



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción

Scattering

Radiación termal

Medios discretos

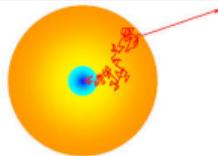
Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

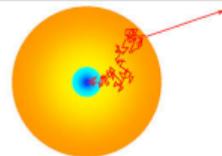
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- El cuerpo negro

- Consideramos un recipiente cerrado A , cuya paredes se mantienen a temperatura T , constante.
- Nos preguntamos, ¿Cuál es el espectro de la radiación en el interior del recipiente? Esta se suele llamar 'radiación de cuerpo negro', también porque resulta (como veremos mas abajo), que es también la radiación emitida por un cuerpo que no refleja nada.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

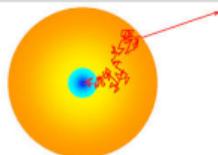
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- El cuerpo negro

- El espectro en el interior del recipiente debe ser universal, es decir solo depende de la temperatura T .
- Para verlo imaginemos que ponemos en contacto dos recipientes, A y A' , de formas distintas pero con la misma temperatura. Además imaginamos que el punto de contacto es un filtro que deja pasar solo radiación de frecuencia ν .
- Si las radiaciones en el interior de los recipientes fuesen distinta, es decir si $I_\nu \neq I'_\nu$, entonces habría un flujo neto de energía entre los dos recipientes, a pesar de compartir la misma temperatura. Esto sería una violación de la 2da ley, por lo que necesariamente $I_\nu \equiv B_\nu(T)$ debe ser universal.
- La función $B_\nu(T)$ se llama *la función de Planck*. A continuación derivaremos $B_\nu(T)$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- Ondas estacionarias

- Consideramos un recipiente cúbico de lado a , con paredes conductoras. En el interior del recipiente pueden existir ondas electromagnéticas estacionarias.
- Separando variables en la Ec. de ondas, para una componente $\psi(\vec{x}, t)$ del campo (\vec{E}, \vec{B}) , $\psi = XYZT$, tenemos

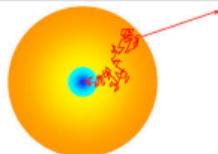
$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T} = 0.$$

- Para $\forall(\vec{x}, t) \Rightarrow$

$$\frac{X''}{X} = -k_1^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_2^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -k_3^2, \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2,$$

con

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

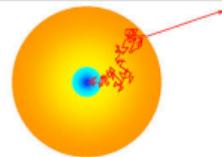
Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- Ondas estacionarias



- Condición de borde en una caja cúbica de lado a con extremos fijos
 $\Rightarrow X = B \sin(k_1 x)$, con $k_i = n_i \pi / a$, y

$$\psi = \sum_{n_1, n_2, n_3} A(n_1, n_2, n_3) e^{-i\omega(n_i, t)} \sin\left(\frac{n_1 \pi X}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi Y}{a}\right) \sin\left(\frac{n_3 \pi Z}{a}\right), \quad (48)$$

con

$$\omega(n_1, n_2, n_3) = \frac{c\pi}{a} \underbrace{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}_n = 2\pi\nu.$$

Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

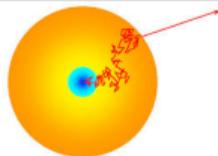
Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- Densidad de estados



- Número total de estados de modos normales (\vec{E}, \vec{B}) , con frecuencia $\nu < \nu_0$, en volumen \mathcal{V} :

$$\phi(\nu_0) = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n^3, \text{ con } n^3 = \left(\frac{2a\nu_0}{c} \right)^3.$$

- Densidad de estados en intervalo de frecuencia $d\nu$, volumen \mathcal{V} :

$$\mathcal{N}(\nu) = \frac{d\phi(\nu)}{d\nu} = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} \mathcal{V},$$

y la densidad de estados en intervalo de frecuencia $d\nu$, por unidad de volumen, es

$$\rho_\nu d\nu = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} d\nu.$$

Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- Tratamiento clásico

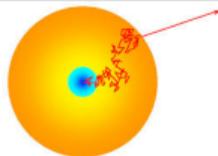
- La energía total almacenada en los modos de vibración del campo (\vec{E} , \vec{B}) es la suma de cada $u_\nu \mathcal{V} = \frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 + E_y^2) \mathcal{V}$.
- Para cada modo, el valor esperado de la energía en un intervalo $d\nu$ es

$$U_\nu = \mathcal{V} \langle u_\nu \rangle = \int d\mathcal{V} \int dE_x dE_y \rho(E_x, E_y) u_\nu,$$

$$\text{donde } \rho(E_x, E_y) \propto e^{-\frac{u_\nu \mathcal{V}}{kT}}.$$

- con 2 grados de libertad de polarización por modo (i.e. E_x y E_y), cada uno contribuyendo un término cuadrático en la energía, el teorema de equipartición da $2 \times kT/2$ por modo.
- la densidad de modos Ec. 43 da la densidad de energía en un intervalo $d\nu$, y por unidad de volumen:

$$u_\nu = kT \rho(\nu) = kT \frac{4\pi\nu^2}{c^3} \Rightarrow \text{catástrofe UV.}$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- Propuesta de Planck

- Planck hip1: sacar promedio por modo cambiando $\int \rightarrow \sum$,

$$\langle U \rangle = \int \mathcal{P}(U) U dU \rightarrow \sum P(U) U, \text{ con } U = n\mathcal{U}.$$

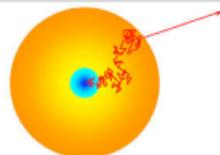
- Planck hip2: esperamos que \mathcal{U} sea una función de la frecuencia, o sea $\mathcal{U} = \sum_j a_j \nu^j$, y por 'simplicidad' ponemos

$$\mathcal{U} = h\nu.$$

- Es decir, recuperamos el concepto de fotones (introducido posteriormente por Einsten en 1905), en que la energía total en un modo con frecuencia ν es

$$U_\nu = nh\nu, \tag{49}$$

con n entero.



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- Propuesta de Planck

- Con esta hipótesis,

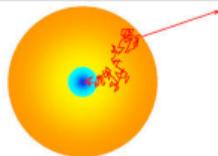
$$\langle U_\nu \rangle = \sum_n \overbrace{nh\nu}^{U_\nu} \underbrace{\frac{e^{-\beta nh\nu}}{\sum_n' e^{-\beta n' h\nu}}}_{\text{probabilidad del estado } n} \quad (50)$$

el cálculo (ver cátedra) da $\langle U_\nu \rangle = -\frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$.

- Usando ahora la densidad de modos de Ec. 43, la densidad de energía es $u_\nu = 2\rho(\nu)\langle U_\nu \rangle$ (el factor 2 da cuenta de los 2 estados de polarización del fotón), y obtenemos $u_\nu c = 4\pi B_\nu$, con

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}.$$

Una comparación con el experimento permite ajustar $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ J s.



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- Propiedades de la función de Planck

- Ley de Wien:

$$\left. \frac{dB_\nu}{d\nu} \right|_{\nu_{\max}} = 0 \Rightarrow \frac{h\nu}{kT} \approx 4.965,$$

$$\boxed{\frac{\lambda_{\max}}{\text{cm}} \frac{T}{\text{K}} = 0.29}, \text{ con } \lambda_{\max} = c/\nu_{\max}. \text{ OJO: } B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu.$$

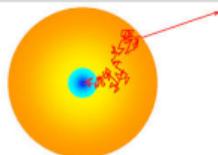
- Ley de Stefan-Boltzmann:

$$\int B_\nu d\nu = B(T) = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \overbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}^{\pi^4/15},$$

$$\boxed{B(T) = aT^4}, \text{ con } \sigma = a\pi = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}. \text{ Notar que } \pi B(T) \text{ es el flujo por unidad de área.}$$

- Ley de Rayleigh-Jeans:

$$\lim_{h\nu \ll kT} B_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \text{ caso clásico, } h \rightarrow 0.$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

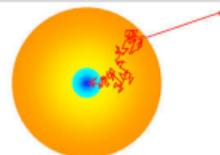
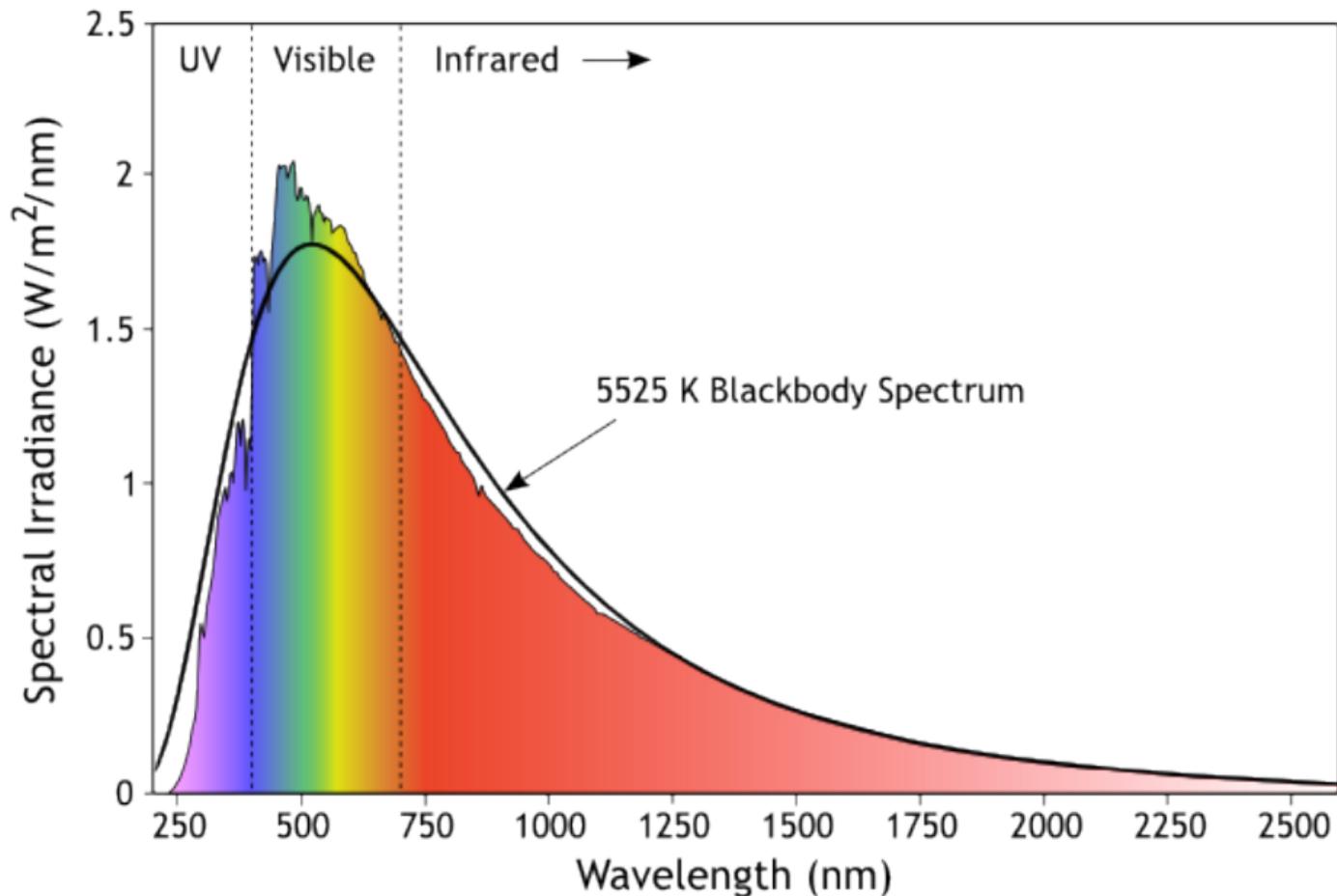
Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Ejemplo: espectro solar



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

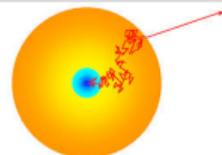
Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

4 Radiación termal- Ley de Kirchoff

- En equilibrio termodinámico, $I_\nu(\hat{k}, \vec{x}) = B_\nu(T)$ y como el campo de temperatura debe ser uniforme, $\frac{dI_\nu}{ds} = 0$. Como la función de fase está normalizada, al integrar la ecuación de transfer en ángulo solido obtenemos la ley de Kirchoff:

$$j_\nu = \alpha_\nu^{\text{abs}} B_\nu. \quad (51)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

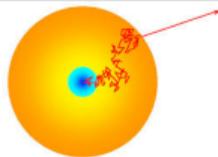
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

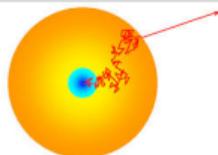
Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

5- Medios discretos



- En un medio discreto el acoplamiento entre radiación y materia ocurre mediante transiciones radiativas, cada una de las cuales lleva un perfil de línea $\phi(\nu)$ angosto y centrado en la frecuencia de la transición ν_0 .
- Las tasas de transiciones radiativas se pueden describir usando los coeficientes de Einstein:
 - A_{ji} : Probabilidad de decaimiento espontáneo por unidad de tiempo y por absorbente (las unidades de A son s^{-1}).
 - $B_{ij}\bar{J}$: Probabilidad de absorción por unidad de tiempo y por absorbente, donde $\bar{J} = \int d\nu\phi(\nu)J_\nu$ es la intensidad específica media promediada en frecuencia (de manera que las unidades MKS de B son $s^{-1}/(W\ m^{-2}sr^{-1})$).
 - $B_{ji}\bar{J}$: Probabilidad de emisiones estimuladas por unidad de tiempo.

Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

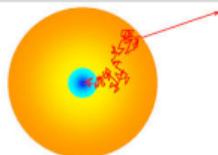
Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

5- Medios discretos



- Los perfiles de líneas $\phi(\nu)$ se pueden describir con Lorentzianas, y sus anchos (o sea los anchos de línea), $\Delta\nu$, están directamente relacionados con la tasa de decaimiento via el principio de incerteza tiempo-energía, $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$:

$$\Delta t \sim \frac{1}{A_{ji}} \sim \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (52)$$

- El principio de balance detallado relaciona los coeficientes de Einstein:

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji}, \quad (53)$$

y

$$A_{ji} = \frac{2h\nu_{ji}^3}{c^2} B_{ji}. \quad (54)$$

Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

5- Medios discretos

- En un medio discreto y homogéneo, la ecuación de RT en su forma compacta (Ec. 47) también es válida, y los coeficientes de emisión y absorción están directamente relacionados con los coeficientes de Einstein. En este caso la función fase es constante, $\Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') = 1/(4\pi)$.
- El coeficiente de emisión es

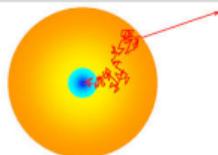
$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_j A_{ji} \phi(\nu). \quad (55)$$

Este coeficiente incluye lo que se llamaría 'scattering' para las líneas: una des-excitación consiguiente a la absorción de un fotón.

- El coeficiente de absorción es

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \phi(\nu). \quad (56)$$

Notar que el coeficiente de emisión estimulada actúa como absorción negativa.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

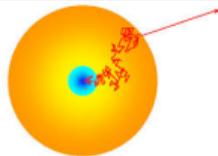
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

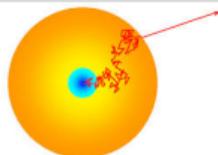
6- Opacidad y profundidad óptica

- Es común el uso de opacidades κ en lugar de los coeficientes de absorción α , con $\alpha = \kappa\rho$, donde ρ es la densidad de masa.
- También definimos la profundidad óptica a lo largo de un rayo,

$$\tau_{\nu}^{\text{abs}} = \int ds \alpha^{\text{abs}} = \int ds \rho \kappa^{\text{abs}}, \quad (57)$$

y

$$\tau_{\nu}^{\text{sca}} = \int ds \alpha^{\text{sca}} = \int ds \rho \kappa^{\text{sca}}. \quad (58)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

6- Opacidad y profundidad óptica

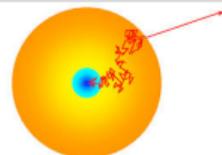
- El decaimiento exponencial en el caso de absorción pura sugiere que $\exp(-\tau_\nu^{\text{abs}})$ es la probabilidad de que un fotón sobreviva la profundidad óptica τ_ν^{abs} sin ser absorbido. Esto nos permite estimar la profundidad óptica media recorrida por los fotones:

$$\langle \tau_\nu \rangle = \int_0^\infty \tau_\nu \exp(-\tau_\nu) d\tau_\nu = 1. \quad (59)$$

- El libre camino medio de los fotones l_ν es la distancia correspondiente, i.e.:

$$l_\nu^{\text{abs}} = \frac{1}{\alpha_\nu^{\text{abs}}} = \frac{1}{n\sigma_\nu^{\text{abs}}}, \quad (60)$$

y similarmente para scattering.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

6.0- Scattering

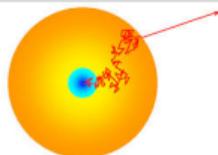
- Cambiando variables con $d\tau_\nu = (\alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}}) ds$, la ecuación de transferencia se puede escribir como

$$\frac{dl_\nu}{d\tau_\nu} = \underbrace{\frac{j_\nu^{\text{abs}} + j_\nu^{\text{sca}}}{\alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}}}}_{S_\nu} - l_\nu, \quad (61)$$

donde hemos definido la función fuente S_ν .

- En ausencia de scattering, i.e. si $\alpha_\nu^{\text{sca}} = 0$, entonces $S_\nu = B_\nu$ para procesos termales (por la ley de Kirchoff).
- Para una función fase isotrópica, i.e. si $\Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') = 1/(4\pi)$, la función fuente es

$$S_\nu = \frac{j_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}} J_\nu}{\alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}}} \quad (62)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

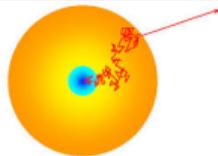
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

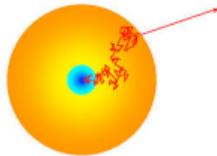
Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

7.1- El eslabón homogéneo

- En el comúnmente usado, pero rara vez exacto, caso sin scattering, la ecuación de transferencia radiativa Ec. 61 es

$$\frac{dl_\nu}{d\tau_\nu} = -l_\nu + S_\nu, \quad (63)$$

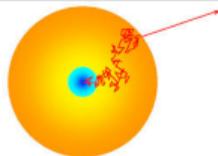
donde $S_\nu = j_\nu^{\text{abs}}/\alpha_\nu^{\text{abs}}$. Para emisión termal, $S_\nu = B_\nu$.

- Es directo mostrar que la solución de Ec. 63 es (tarea)

$$l_\nu(\tau_\nu) = l_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} d\tau'_\nu e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu). \quad (64)$$

- Para un eslabón uniforme, con constante S_ν ,

$$l_\nu(\tau_\nu) = l_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (65)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

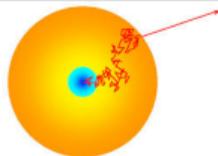
Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria**
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

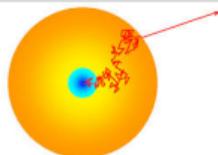
7.2- Marcha aleatoria

- Si un medio es ópticamente grueso en scattering esperamos que un fotón seguirá una marcha aleatoria hasta su absorción o eventual escape del medio. El desplazamiento neto es $\vec{R} = \sum_i \vec{s}_i$, y la dispersión en el desplazamiento es $\sigma(\vec{R}) \equiv (\langle \|\vec{R}\|^2 \rangle)^{1/2} = \sqrt{N}(\langle \|\vec{s}\|^2 \rangle)^{1/2}$. Con $\langle \|\vec{s}\|^2 \rangle^{1/2} \sim l$, el libre camino medio del fotón, tenemos $\sigma(R) \sim \sqrt{Nl}$.
- La probabilidad de absorción en cada paso es

$$\epsilon = \frac{\alpha_\nu^{\text{abs}}}{\alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}}}. \quad (66)$$

Como todos los pasos son estadísticamente independientes, la probabilidad de absorción para N pasos es simplemente $N\epsilon_\nu$, y el número promedio de pasos antes de la absorción es $1/\epsilon_\nu$.

- Entonces, para un medio infinito, $\sigma(R) = l/\sqrt{\epsilon_\nu}$, lo cual representa una escala de termalización: si un medio es más grande que $\sigma(R)$, entonces se dice que es efectivamente grueso ya que la mayoría de los fotones serán absorbidos en el medio.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

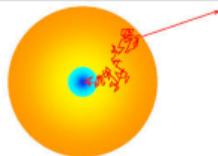
El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland**
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

7.3- Aproximación de Rosseland

- Luego del caso extremo del equilibrio termodinámico, un grado mas suave de idealización es el de un equilibrio termodinámico 'local', con pequeñas desviaciones de I_ν relativo a $B_\nu(T)$.
- La ecuación de transfer para scattering isotrópico se puede escribir

$$\frac{dI_\nu}{ds} = - \overbrace{(\alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{scat}})}^{\alpha_\nu} (I_\nu - S_\nu), \quad (67)$$

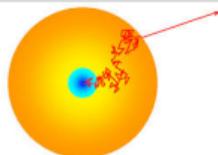
y en estado estacionario, $\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \hat{\mathbf{s}} \cdot \vec{\nabla} I_\nu$.

- Para procesos radiativos termales, $S_\nu = B_\nu$, de manera que

$$I_\nu = B_\nu - \underbrace{\frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial s}}_{\text{corrección de 1er orden}}. \quad (68)$$

- Si la corrección de primer orden es pequeña, aproximamos $\frac{\partial I_\nu}{\partial s} \approx \frac{\partial B_\nu}{\partial s}$, y

$$I_\nu \approx B_\nu - \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial s}. \quad (69)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

7.3- Aproximación de Rosseland

- Para el flujo $\vec{F}_\nu = \oint I_\nu \hat{k} d\Omega$ integramos en ángulo sólido. Concretamente,

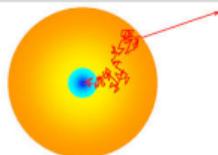
$$\vec{F}_\nu \cdot \hat{z} \equiv F_\nu = \oint \hat{k} \cdot \hat{z} I_\nu(\Omega) d\Omega = \oint \cos(\theta) I_\nu(\Omega) d\Omega. \quad (70)$$

- Para una aplicación en geometría plano-paralela necesitamos escribir Ec. 69 en términos de $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial s} = \hat{s} \cdot \vec{\nabla} B_\nu = \mu \frac{\partial B_\nu}{\partial z}. \quad (71)$$

- Una integración directa de Ec. 69 arroja

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}. \quad (72)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

7.3- Aproximación de Rosseland

- Para el flujo bolométrico integramos Ec. 72 en frecuencia:

$$F(z) = \int_0^\infty d\nu F_\nu(z) = -\frac{4\pi}{3} \frac{\partial T}{\partial z} \int_0^\infty d\nu \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T}. \quad (73)$$

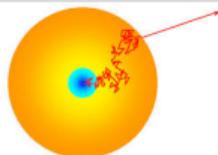
- Introducimos el coeficiente de absorción de Rosseland,

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int_0^\infty d\nu \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T}}{\int_0^\infty d\nu \frac{\partial B_\nu}{\partial T}}, \quad (74)$$

y notamos que $\int_0^\infty d\nu \frac{\partial B_\nu}{\partial T} = \frac{4}{\pi} \sigma T^3$.

- Finalmente, el flujo en LTE es:

$$\vec{F} \cdot \hat{s} = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R} \frac{\partial T}{\partial s}. \quad (75)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

7.3- Aproximación de Rosseland

- También podemos escribir Ec. 75 como

$$\vec{F} \cdot \hat{s} = -\frac{4\sigma}{3\alpha_R} \frac{\partial T^4}{\partial s}, \quad (76)$$

o bien

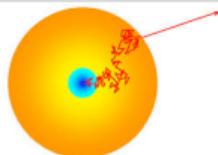
$$\vec{F} \cdot \hat{s} = -\frac{4c}{3\alpha_R} \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (77)$$

Donde u es la densidad de energía radiativa bolométrica.

- Es interesante notar la similitud entre la aproximación de Rosseland y la ley de Fick para difusión:

$$\text{flux} \sim -D \vec{\nabla} \text{ cantidad siendo difundida}, \quad (78)$$

en este caso $D = \frac{1}{3}cl$, donde $l \equiv 1/\alpha_R$ sería un libre camino medio efectivo.



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

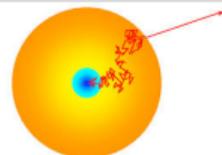
El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Descomposición Espectral
- 2 Intensidad específica**
 - Óptica geométrica
 - Intensidad específica y sus momentos
- 3 Transferencia radiativa**
 - Emisión
 - Absorción
 - Scattering
- 4 Radiación termal**
- 5 Medios discretos**
- 6 Opacidad y profundidad óptica**
- 7 Soluciones de la ecuación de transfer**
 - El eslabón homogéneo
 - Marcha aleatoria
 - Aproximación de Rosseland
 - Aproximación de Eddington



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y profundidad óptica

Soluciones de la ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

7.4- Aproximación de Eddington

- En geometría plano-paralela, los momentos angulares de radiación,

$$\begin{Bmatrix} cU_\nu \\ \vec{F}_\nu \\ c\mathbf{P}_\nu \end{Bmatrix} \equiv \oint \begin{Bmatrix} 1 \\ \hat{k} \\ \hat{k}\hat{k} \end{Bmatrix} I_\nu(\hat{k}) d\Omega, \quad (79)$$

introducidos en Sec. 2, se pueden resumir como

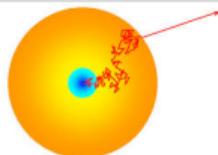
$$\begin{Bmatrix} J_\nu \\ H_\nu \\ K_\nu \end{Bmatrix} \equiv \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \end{Bmatrix} I_\nu(\mu) d\mu, \quad (80)$$

es decir $J_\nu = c\frac{U_\nu}{4\pi}$, $H_\nu = \frac{\vec{F}_\nu|_z}{4\pi}$, $K_\nu = c\frac{\mathbf{P}_\nu|_{zz}}{4\pi}$.

- En el tratamiento que conduce a la aproximación de Eddington, suponemos que $I_\nu(\mu)$ es casi isotrópica y expandimos hasta primer orden en μ :

$$I_\nu = a_\nu + b_\nu \mu, \quad (81)$$

i.e. similar a un término dipolar $b\mu$ modificando el monopolo a .



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica
Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa
Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer
El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

7.4- Aproximación de Eddington

- Evaluación directa de Ec. 80 usando Ec. 81 conduce a $J_\nu = a_\nu$, $H_\nu = \frac{b_\nu}{3}$ y $K_\nu = \frac{a_\nu}{3}$ (tarea).
- Entonces tenemos,

$$K_\nu = \frac{1}{3}J_\nu, \quad (82)$$

exactamente igual que para radiación termal, para la cual la presión de radiación es $p_\nu = \frac{1}{3}u_\nu$, pero aquí en un caso mas general. La Ec. 82 se conoce como aproximación de Eddington.

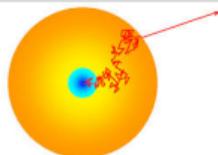
- La ecuación de RT plano-paralela que sigue de Ec. 67 y Ec. 71 es

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = -\alpha_\nu (I_\nu - S_\nu), \quad (83)$$

o

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = -(I_\nu - S_\nu), \quad (84)$$

donde la función fuente está dada por Ec. 62 para el caso de scattering isotrópico.



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

7.4- Aproximación de Eddington

- Ahora tomamos $\int d\mu$ (Ec. 84),

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \tau_\nu} = J_\nu - S_\nu, \quad (85)$$

y $\int d\mu \mu$ (Ec. 84),

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial \tau_\nu} = H_\nu. \quad (86)$$

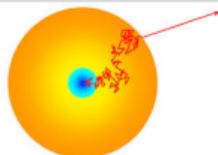
- Usando la aproximación de Eddington (Ec. 82), obtenemos una ecuación para J_ν en función de S_ν :

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^2 J_\nu}{\partial \tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu, \quad (87)$$

- En términos del albedo $\omega_\nu = 1 - \epsilon_\nu$ (ver Ec. 66),

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^2 J_\nu}{\partial \tau_\nu^2} = \epsilon(\nu)(J_\nu - B_\nu), \quad (88)$$

lo cual, si las propiedades del medio son conocidas, es una ecuación de 2do orden para $J_\nu(\tau_\nu)$. Si es posible resolver Ec. 88 para $J_\nu(\tau_\nu)$, tenemos I_ν por integración de Ec. 84.



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral

Intensidad específica

Óptica geométrica
Intensidad específica y sus
momentos

Transferencia radiativa

Emisión
Absorción
Scattering

Radiación termal

Medios discretos

Opacidad y
profundidad óptica

Soluciones de la
ecuación de transfer

El eslabón homogéneo

Marcha aleatoria

Aproximación de Rosseland

Aproximación de Eddington