

# Part IV

# Interiores estelares

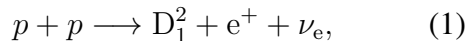
## Contents

- IV** **1**
- 1 Observaciones directas** **1**
  - 1.1 Neutrinos solares . . . . . 1
  - 1.2 Helio- y astero-sismología . . . . . 4
- 2 Estructura estelar** **8**
  - 2.1 Equilibrio hidroestático . . . . . 8
  - 2.2 Transporte radiativo . . . . . 8
  - 2.3 Ecuaciones de estructura . . . . . 9
  - 2.4 Transporte mecánico de energía . . . . . 10
  - 2.5 Una formalismo para convección . . . . . 14
- 3 Ecuaciones de estados** **15**
  - 3.1 Modelos politrópicos . . . . . 15
  - 3.2 Gas degenerado . . . . . 16
  - 3.3 Límite de Edington . . . . . 18
- 4 Pulsaciones estelares** **19**
  - 4.1 Estrellas variables . . . . . 19
  - 4.2 Estrellas pulsantes . . . . . 21

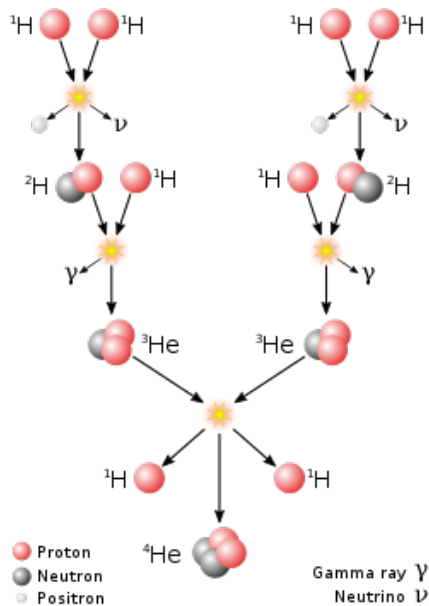
## 1 Observaciones directas

### 1.1 Neutrinos solares

En el corazón del Sol la fusión de H en He ocurre a través de la ‘cadena p-p’, que parte con la reacción



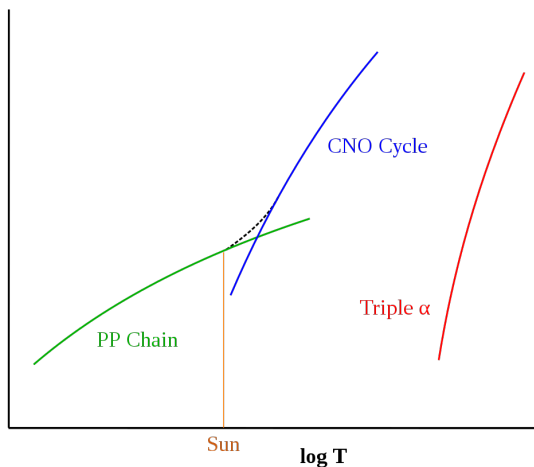
donde  $\nu_e$  es un ‘neutrino’, una partícula que solo se acopla con la materia mediante la interacción débil.



- El grueso de los  $\nu_e$  emitidos se escapan del Sol.

.3

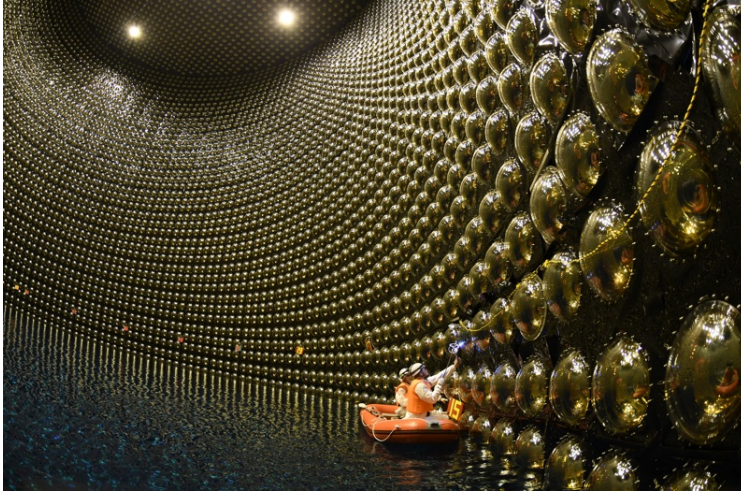
- La cadena p-p, así como otros caminos de fusión de H en He, es muy sensible a la temperatura.



- El flujo de  $\nu_e$  en la tierra es una medida de la temperatura en el centro del Sol.

.4

Los neutrinos se logran detectar con experimentos dedicados, por ejemplo con Super-Kamiokande (1 km bajo tierra en Japón), que usa la radiación de Cherenkov debido a la propagación a velocidad  $> c/n$  de las partículas secundarias generadas por la interacción débil de  $\nu_e$  con agua.



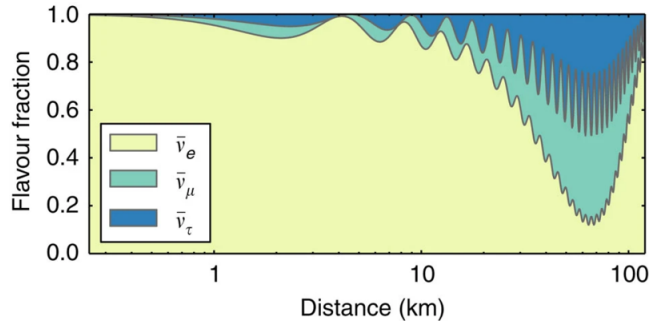
.5

- A pesar de la dificultad de detectar  $\nu_e$ , múltiples experimentos confirmaron que el flujo de neutrinos solares es solo  $\sim 1/3$  del esperado por la teoría de interiores estelares.
- Este es el “solar neutrino problem”, que obsesionó a astrofísicos y particulistas desde 1968 hasta 2002.



.6

- La resolución del ‘solar neutrino problem’ (del  $\sim 2002$ ) se debe a que estas partículas tienen masa, y pueden cambiar de ‘sabor’ (o “neutrino flavor”) entre  $\nu_e, \nu_\tau$ , o  $\nu_\mu$ :  $|\nu_\alpha\rangle = \sum_{\beta=1}^3 U_{\alpha\beta} |\nu_\beta\rangle$ , con  $\alpha = e, \mu$  o  $\tau$ .
- Este fenómeno requiere que los  $\nu_e$  tengan masa, aunque aún no se haya medido ( $< 2 \times 10^{-37}$  kg).
- En el caso de los neutrinos más energéticos, se puede confirmar mediante experimento que los neutrinos  $\nu_e$  generados en reactores de partículas efectivamente cambian de sabores:



<https://www.nature.com/articles/ncomms7935.pdf>

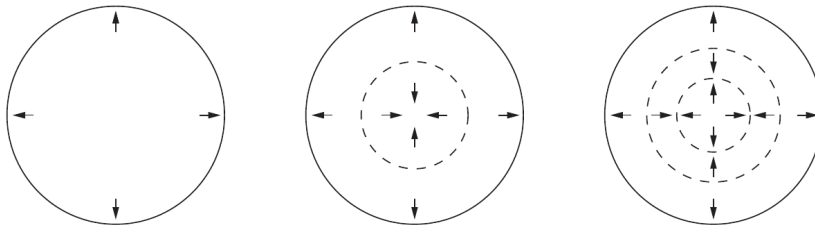
.7

- Temas de presentación:
  - Supernova SN 1987A y supernova neutrinos.
  - El detector “IceCube” y “multi-messenger astronomy”.

.8

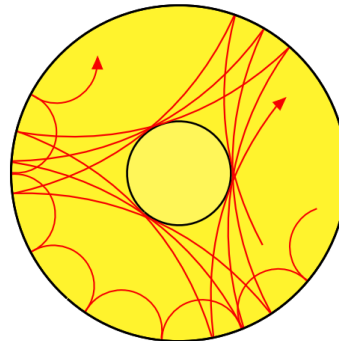
## 1.2 Helio- y astero-sismología

- Las estrellas, y el sol, siempre tienen algún grado de variabilidad.
- En el caso de observaciones no resueltas, las variaciones en luminosidad  $L(t)$  se pueden deber a cambios en el radio estelar, y los correspondientes cambios en la velocidad radial aparente de la estrella, o bien a variaciones en la distribución de la temperatura superficial.
- Las variaciones radiales de pequeña amplitud son oscilaciones radiales:



.9

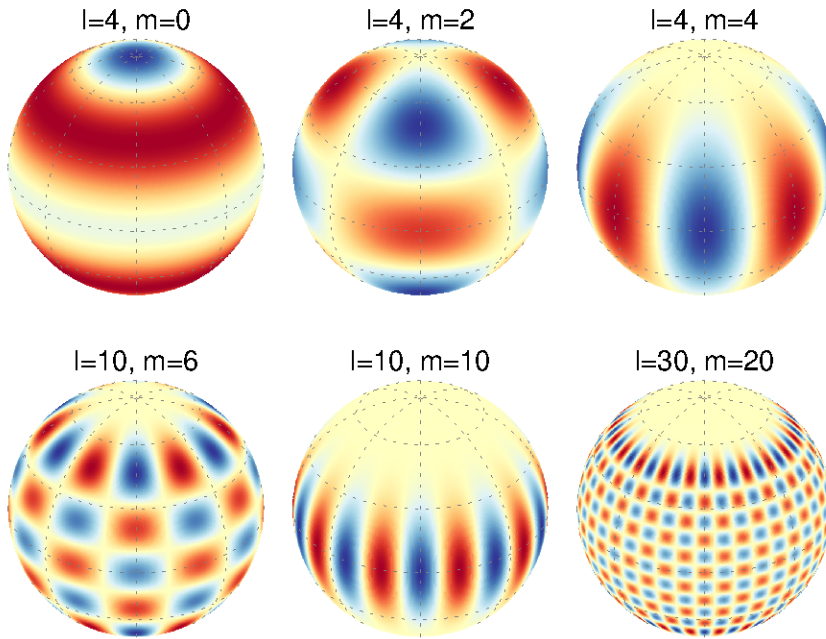
- Además de las oscilaciones radiales, la propagación de ondas de sonido a través de la estrella generan perturbaciones locales en la superficie de temperatura y/o velocidad en la línea de visión.
- Las ondas de sonido se refractan en el interior de la estrella porque su velocidad depende de la temperatura local ( $c_s \sim \sqrt{\gamma kT / (\mu m_H)}$ ). A su vez, se reflejan en el ‘borde libre’ correspondiente a la superficie.



- Una medición astero-sismologica “integrada”, es decir no-resuelta, consiste entonces en descomponer una serie de tiempo en sus modos de Fourier.

.10

- En el caso de mediciones resueltas, se descomponen la serie de tiempo de la imagen en armónicos esféricos.



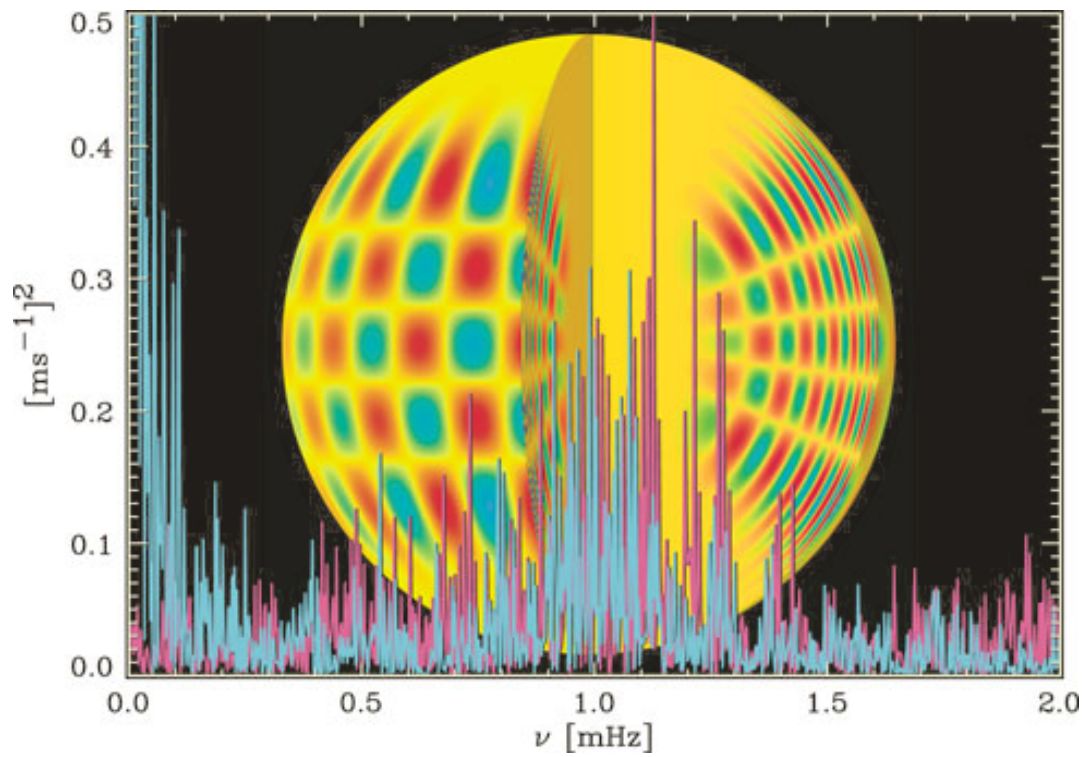
.11

- Un ejemplo de observatorio helio-sismológico es GONG - Global Oscillations Network Group,



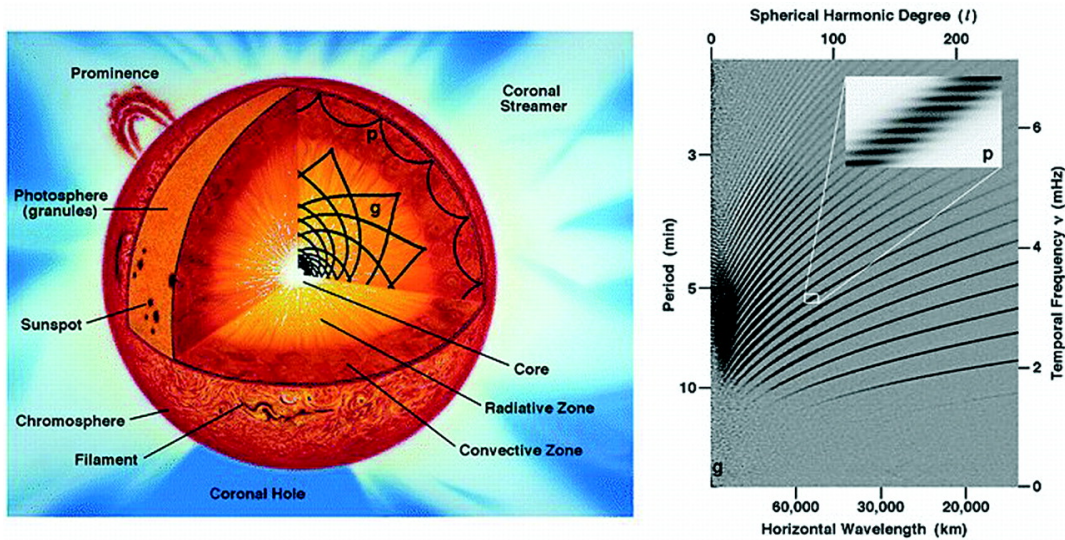
.12

- Ejemplo de medición para el Sol:



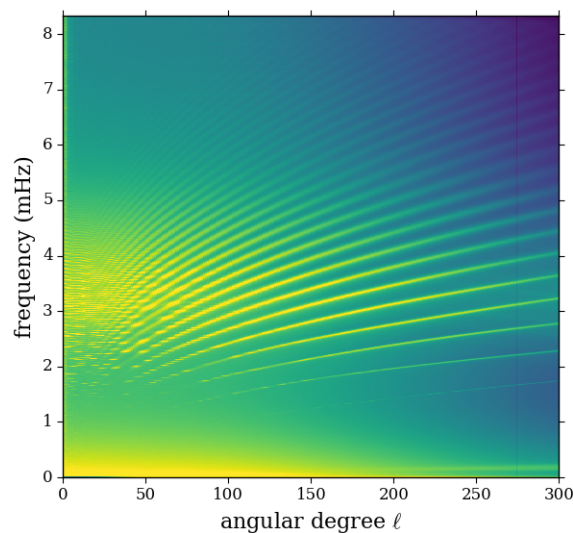
.13

- Entonces en base al monitoreo 24h del Sol, se puede construir un diagrama entre la frecuencia de oscilación y su escala angular  $l$ . Este espectro de potencia, o la relación entre frecuencia temporal y escala lineal en la superficie arroja información importante sobre la propagación del sonido en el interior estelar.



<https://www.pnas.org/content/96/10/5356>

- Ejemplo de espectro de potencia Solar (satélite SOHO):



- El monitoreo helio-sismológico arroja mediciones de espectro de potencias que están en pleno acuerdo con la teoría de interiores estelares y el modelo estándar del Sol.
- Esta convergencia fue uno de los primeros indicios en revisar el modelo estándar de partículas.

## 2 Estructura estelar

### 2.1 Equilibrio hidrostático

- Es posible inferir la estructura interna de una estrella desde primeros principios, es decir planteando las ecuaciones que rigen la estructura de la estrella y su evolución.
- Una primera ecuación que gobierna al estructura estelar es el equilibrio hidrostático:

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = -\frac{\rho(r)GM(r)}{r^2}. \quad (2)$$

- Para un sistema dinámico,

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\rho(r)GM(r)}{r^2} - \frac{\partial P(r)}{\partial r}. \quad (3)$$

- La masa encerrada dentro del radio  $r$  es

$$M(r) = \int_0^r dM(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (4)$$

- Entonces otra ecuación relaciona la masa encerrada con la densidad:

$$\frac{\partial M(r)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (5)$$

- Con el perfil de densidad  $\rho(r)$  podríamos entonces calcular la presión en el centro del Sol (ver ejemplo 5.1 de Leblanc).

### 2.2 Transporte radiativo

- En el Cap. A vimos que en un medio opaco, como en interiores estelares, el flujo bolométrico radial (flujo de Eddington) está dado por la aproximación de Rosseland:

$$H(r) = \int_0^\infty d\nu H_\nu(r) = -\frac{1}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial B}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (6)$$

donde  $B = \int_0^\infty d\nu B_\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi}$ .

- El flujo se relaciona con una luminosidad  $L(r)$ , correspondiente a la luminosidad que tendría la estrella si se truncara en  $r$ :

$$4\pi H(r) = \left( \frac{L(r)}{4\pi r^2} \right). \quad (7)$$

- Tenemos la ecuación de transporte de energía radiativa (tarea):

$$\frac{\partial T(r)}{\partial r} = -\frac{3\kappa_R \rho}{64\pi r^2 \sigma T^3} L(r). \quad (8)$$



- A diferencia de la atmósfera estelar, en el interior se genera luminosidad por unidad de volumen, con una tasa  $\epsilon(r)$ .
- El incremento de luminosidad correspondiente a un cascarón  $dr$  es  $dL(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) dr$ , por lo que una ecuación que relaciona  $L(r)$  con  $\epsilon(r)$  es

$$\frac{\partial L(r)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r). \quad (9)$$

.19

## 2.3 Ecuaciones de estructura

- Las Ecs. 2, 5, 8 y 9 se pueden reescribir en función de  $M(r)$  como variable independiente, en lugar de usar directamente  $r$  (**tarea**):

$$\frac{\partial P(M)}{\partial M} = -\frac{GM}{4\pi r^4(M)}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial r(M)}{\partial M} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho(M)}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial L(M)}{\partial M} = \epsilon(M), \quad (12)$$

$$\frac{\partial T(M)}{\partial M} = -\frac{3\kappa_R}{256\pi^2 r^4 \sigma T^3} L(M). \quad (13)$$

- Este conjunto de ecuaciones describe entonces un interior estelar con transporte radiativo de energía. Se suele discretizar estas ecuaciones usando una malla lineal en  $M$ .

.20

- Para que el conjunto de ecuaciones Ecs.10, 11, 12 y 13 quede completamente definido, es necesario especificar la ecuación de estado:

$$P = P(\rho, T, \{X_i\}_{i=1}^A), \quad (14)$$

que depende de las abundancias  $\{X_i\}_{i=1}^A$  de las  $A$  especies que constituyen la estrella. Estas especies están a su vez relacionadas por reacciones químicas, y las  $\{X_i\}_{i=1}^A$  se calculan usando la ley de masa-acción (para la cual es necesario conocer el potencial químico  $\mu_i(T, P)$  de cada especie).

.21

- Dado el conjunto de ecuaciones, las soluciones para el interior estelar requieren además de condición de bordes.
- En el centro de la estrella se debe cumplir  $L(M=0) = 0$ , y  $r(M=0) = 0$ .
- En la superficie, se puede usar un modelo de atmósfera, o bien, en su ausencia, simplemente  $P(M=M_\star) = 0$ ,  $\rho(M=M_\star) = 0$  y finalmente  $T(M=M_\star) = T_{\text{eff}}$ .

.22

## 2.4 Transporte mecánico de energía

- Como vimos en el Cap. A, el fenómeno de difusión radiativa, con un flujo dado por

$$H_R = \vec{F} \cdot \hat{s} = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R} \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{4c}{3\alpha_R} \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (15)$$

ocurre de una manera similar a un proceso de difusión, los cuales son descritos por la ley de Fick:

$$\text{flux} \sim -D \vec{\nabla} \text{ cantidad siendo difundida} \quad (16)$$

con  $D = \frac{1}{3}cl$ , donde  $l$  es el libre camino medio de las partículas responsables por la difusión.

- Entonces para radiación  $l_R \equiv 1/\alpha_R$ , con

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int_0^\infty d\nu \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T}}{\int_0^\infty d\nu \frac{\partial B_\nu}{\partial T}}, \quad (17)$$

es un libre camino efectivo para los fotones.

.23

- Además del transporte radiativo de energía, si el libre camino medio de las partículas, y en particular de los electrones  $l_e = 1/(n\sigma)$ , es comparable al de los fotones, entonces la difusión de calor puede ser un proceso importante.
- Si la ecuación de estado es la del gas ideal, típicamente el libre camino medio de las especies es despreciable ante  $l_R$ . Pero algunos interiores estelares son ‘degenerados’ (ver más adelante), y en ese caso los electrones tienen un libre camino medio  $l_e$  comparable o más grande que  $l_R$ .
- En el caso de conducción de calor, tenemos entonces un flujo de energía similar al radiativo:

$$H_{\text{cond}} = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_{\text{cond}}} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (18)$$

con  $\alpha_{\text{cond}} = \kappa_{\text{cond}}\rho$ . Notar que Ec. 18 difiere de Ec. 5.39 en Leblanc porque en estos apuntes uso el coeficiente de absorción total, mientras que Leblanc lo define por u. de ángulo sólido (i.e. dividido por  $4\pi$ ).

.24

- Podemos juntar los dos términos de transporte de energía con

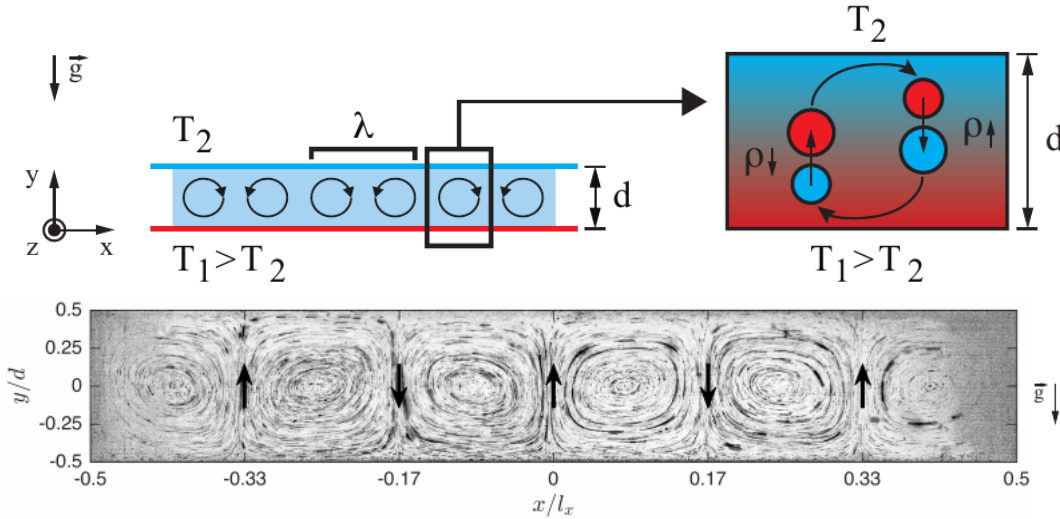
$$H_{\text{tot}} = H_{\text{cond}} + H_R = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_{\text{cond}}\rho} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R\rho} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_{\text{tot}}\rho} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (19)$$

con

$$\frac{1}{\kappa_{\text{tot}}} = \frac{1}{\kappa_{\text{rad}}} + \frac{1}{\kappa_{\text{cond}}}. \quad (20)$$

.25

- Otro mecanismo de transporte de energía es la advección de energía, es decir su transporte mecánico a través de movimientos convectivos, o ‘convección’.
- Este fenómeno hidrodinámico ocurre, por ejemplo, en presencia de un gradiente de temperatura pronunciado.
- Se puede observar de manera controlada en laboratorio:



Vial & Hernandez 2017, *Physics of Fluids*, 29, 7 Inestabilidad de Rayleigh-Bernard, figura extraída de la defensa de doctorado de Manuel Vial, Fluidodinámica, FCFM.

- En presencia de gravedad, el movimiento vertical sobre una barra o cinta caliente conduce a la formación de plumas térmicas:
- Teoría:

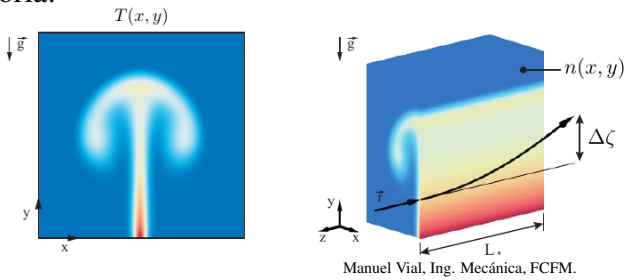


Figura extraída de la defensa de doctorado de

Manuel Vial, Ing. Mecánica, FCFM.

- Experimento:

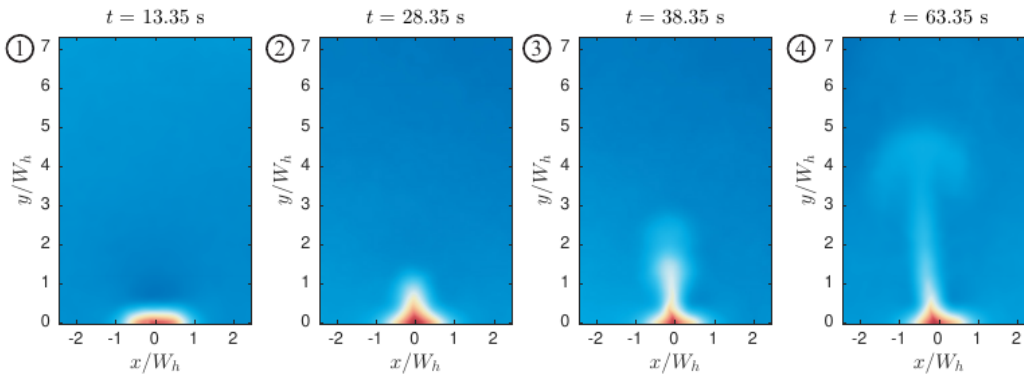
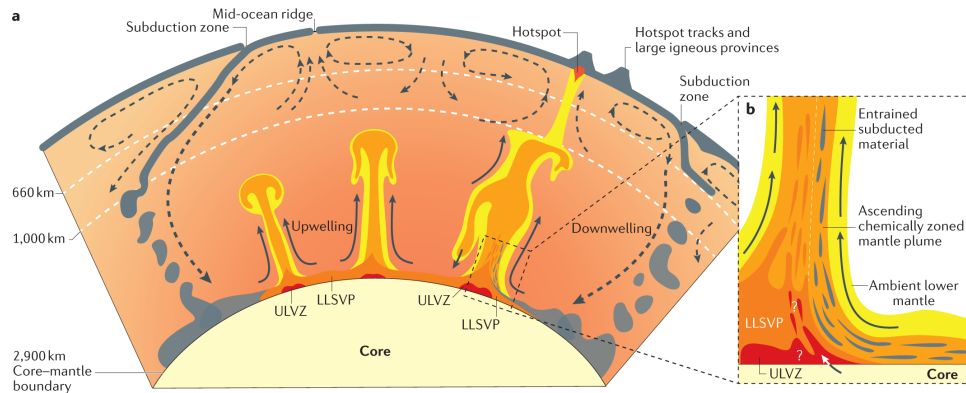


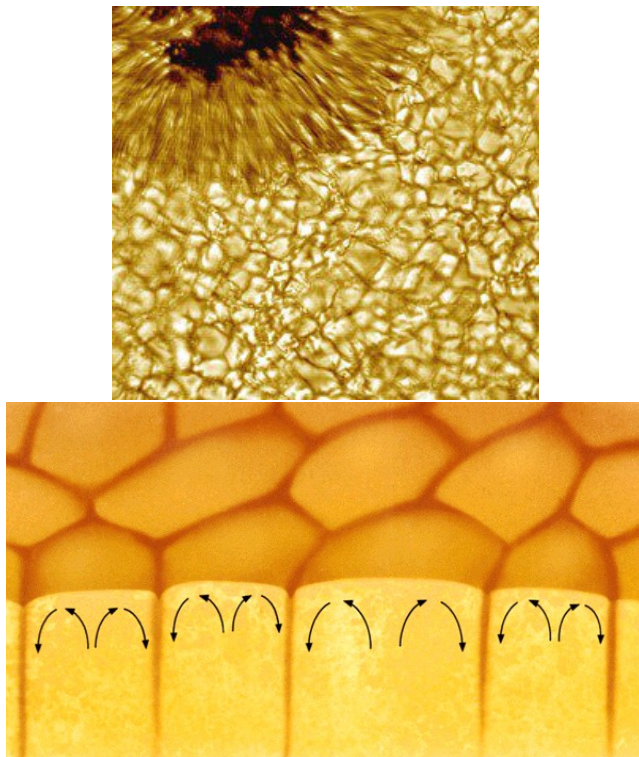
Figura extraída de la defensa de doctorado de Manuel Vial, Ing. Mecánica, FCFM.

- Grandes movimientos convectivos ocurren en el manto terrestre,



Koppers et al. 2021, Nat Rev Earth Environ 2, 382.

- Y también en la fotosfera solar, donde se observan los “solar granules”:



- El gradiente de densidad  $\left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_R$  en presencia solo de transporte radiativo cumple con el equilibrio hidrostático. Pero si el gradiente de densidad es inferior para un elto. de volumen específico, existirá un des-balance y una fuerza de flotabilidad que impulsará el elemento de volumen.
- Si este movimiento vertical es suficientemente rápido, durante el desplazamiento de una celda convectiva no habrá tiempo de relajación termal, y usamos la aproximación adiabática.
- Entonces, habrá inestabilidad y se gatillará la convección si el gradiente de densidad adiabático es más empinado que el radiativo:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_{\text{adi}} < \left. \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_R. \quad (21)$$

.30

- El criterio para la gatilla de convección de Ec. 21 es conocido como criterio de Schwarzschild.
- Pasando al ln, el mismo criterio se puede escribir

$$\left. \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} \right|_{\text{adi}} < \left. \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} \right|_R. \quad (22)$$

- Usando ahora una ecuación de estado  $P \propto \rho T$ ,

$$\left. \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} \right|_R = \left. \frac{\partial \ln(P)}{\partial r} \right|_R - \left. \frac{\partial \ln(T)}{\partial r} \right|_R. \quad (23)$$

- Por otro lado, para un proceso adiabático y cuasiestático,  $P \propto \rho^\gamma$ , donde  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$  es el índice adiabático, y

$$\left. \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial r} \right|_{\text{adi}} = \frac{1}{\gamma} \left. \frac{\partial \ln(P)}{\partial r} \right|_{\text{adi}}. \quad (24)$$

.31

- Finalmente, llegamos a una forma más útil del criterio de convección ( **tarea** ):

$$\nabla_R \equiv \left. \frac{\partial \ln(T)}{\partial \ln(P)} \right|_R > \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) = \left. \frac{\partial \ln(T)}{\partial \ln(P)} \right|_{\text{adi}} \equiv \nabla_{\text{adi}}. \quad (25)$$

- Usando la aproximación de Rosseland y el equilibrio hidrostático ( **tarea** , notar distinta notación para  $\kappa_R$  comparado con Leblanc):

$$\nabla_R = \frac{3\kappa_R}{64\pi r^2} \frac{1}{g} \frac{P}{\sigma T^4} L(r) > \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right), \quad (26)$$

donde  $g$  es la aceleración de gravedad.

- Vemos entonces que las regiones con alta opacidad  $\kappa_R$  serán más propensas a gatillar convección. Esto ocurre por ejemplo en regiones donde hay elementos parcialmente ionizados (es decir con fracción de ionización  $\sim 0.1$ ), donde los niveles excitados de iones están poblados y contribuyen a aumentar la opacidad de líneas.

.32

## 2.5 Una formalismo para convección

- Queremos estimar el flujo de energía  $H_{\text{conv}}$  correspondiente a convección.
- Notamos que en realidad el gradiente  $\left. \frac{\partial \ln(T)}{\partial \ln(P)} \right|_{\text{cel}}$  será menos empinado que el caso adiabático, e intermedio con el caso radiativo:  $\nabla_{\text{R}} > \nabla_{\text{cel}} > \nabla_{\text{adi}}$ . Por otro lado, el medio que rodea la celda convectiva y en el cual se gatilla la convección también es un promedio entre transporte radiativo y convectivo, y tiene un gradiente distinto  $\nabla_{\text{med}}$ :  $\nabla_{\text{R}} > \nabla_{\text{med}} > \nabla_{\text{adi}}$ .
- Para que se gatille el movimiento vertical de la celda, el criterio de Schwarzschild pide que

$$\nabla_{\text{med}} > \nabla_{\text{cel}}. \quad (27)$$

.33

- En la teoría de convección de ‘longitud de mezcla’ (“mixing-length”), una celda convectiva sube una cierta distancia  $\Delta r$  antes de equilibrarse con el medio. Al terminar su ascenso, existe una diferencia de temperatura  $\Delta T = T_{\text{cel}} - T_{\text{med}}$  con el medio, y si  $\Delta r$  es pequeño:

$$\Delta T \approx \left[ \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{cel}} - \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{med}} \right] \quad (28)$$

- Podemos reescribir  $\Delta T$  en Ec. 28 usando que  $\frac{\partial T}{\partial r} = T \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial r}$ . El equilibrio hidrostático da

$$\frac{\partial \ln(P)}{\partial r} = -\frac{\rho g}{P}, \quad (29)$$

y a su vez  $\frac{\partial \ln(P)}{\partial r} = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial r} \equiv -\frac{1}{H}$ , donde  $H > 0$  es la escala típica donde varía  $P$ .

- Con esta notación,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{cel}} = -\frac{T}{H} \nabla_{\text{cel}} \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{med}} = -\frac{T}{H} \nabla_{\text{med}}. \quad (31)$$

.34

- Si la velocidad típica de una celda es  $\bar{v}$ , y considerando equilibrio de presión en todo  $r$ , el calor entregado por u. de volumen de celda es  $\rho c_P \Delta T$ , y el flujo de calor es

$$F_{\text{conv}} = 4\pi H_{\text{conv}} = \rho c_P \bar{v} \Delta T. \quad (32)$$

- Podemos estimar  $\bar{v}$  considerando que, por el ppio de Arquímedes, la fuerza de flotabilidad que actúa sobre una celda de volumen  $V_{\text{cel}}$  es igual al peso del volumen desplazado, es decir  $F_{\text{Arq}} = \rho_{\text{med}} g$ , y la fuerza neta que eleva la celda es  $F = V_{\text{cell}}(\rho_{\text{med}} - \rho_{\text{cel}})g$ , de manera que la fuerza neta unidad de volumen es  $f = (\rho_{\text{med}} - \rho_{\text{cel}})g \equiv g\Delta\rho$ .

- Usando una ecuación de estado de gas ideal,  $P \propto \rho T$ , y como  $\Delta P = (\rho_{\text{med}} - \rho_{\text{cel}}) = 0$ ,

$$\Delta \rho = -\frac{\rho}{T} \Delta T. \quad (33)$$

- La expresión para  $\Delta T$  en Ec. 28 da entonces

$$f = \left(\frac{\rho g}{H}\right) (\nabla_{\text{med}} - \nabla_{\text{cel}}) \Delta r. \quad (34)$$

.35

- Suponemos ahora que las celdas fueron aceleradas por  $f$  en una distancia  $l/2$ . El trabajo correspondiente, si suponemos que  $\left(\frac{\rho g}{H}\right) (\nabla_{\text{med}} - \nabla_{\text{cel}})$  es constante durante el ascenso de la celda (es decir si nos quedamos a orden 1), es

$$W = \int_0^{l/2} f(\Delta r) d(\Delta r) = \frac{l^2}{8} \left(\frac{\rho g}{H}\right) (\nabla_{\text{med}} - \nabla_{\text{cel}}). \quad (35)$$

- Al término de la aceleración la energía cinética de la celda es  $\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 \approx \frac{W}{2}$ , donde el factor  $\frac{1}{2}$  da cuenta aprox. que la mitad de  $W$  trabaja contra fricción.
- Con este análisis,

$$\bar{v} \approx \left(\frac{gH}{8}\right)^{1/2} \left(\frac{l}{H}\right) (\nabla_{\text{med}} - \nabla_{\text{cel}})^{1/2}, \quad (36)$$

.36

- Finalmente reescribimos el flujo convectivo de calor,

$$H_{\text{conv}} = \frac{\rho c_P T}{8\pi} \left(\frac{gH}{8}\right)^{1/2} \left(\frac{l}{H}\right)^2 (\nabla_{\text{med}} - \nabla_{\text{cel}})^{3/2}. \quad (37)$$

- En la práctica, se reemplaza  $\nabla_{\text{med}}$  por  $\nabla_{\text{R}}$  y  $\nabla_{\text{cel}}$  por  $\nabla_{\text{adi}}$ , y se trata a  $l/H$  como parámetro libre.
- Problema: calcule el gradiente de temperatura si la convección domina el transporte de energía (**tarea**, ver Sec. 5.3.3.4 de Leblanc).

.37

## 3 Ecuaciones de estados

### 3.1 Modelos politrópicos

- Se puede reescribir (**tarea**) la ecuación de equilibrio hidrostático, Ec. 2:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho \quad (38)$$

- Si pudiésemos relacionar  $P(\rho)$  directamente, sin pasar por la estructura termal y química de la estrella, entonces Ec. 38 describiría completamente la estructura estelar.
- Es con este fin que se introdujeron los modelos politrópicos, en que la ecuación de estado se simplifica a:

$$P = K\rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad (39)$$

donde  $n$  es el índice politrópico (“polytropic”).

- Un ejemplo de politropo (“polytrope”) es el caso de una estrella completamente convectiva, en la que la ecuación de expansión adiabática reemplaza la ecuación de estado:  $P \propto \rho^{5/3}$  y  $n = 1.5$ .

.38

- Es usual re-escribir Ec. 38 para  $\rho(r)$  introduciendo una función auxiliar  $\theta(r)$ , tal que

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(r), \quad (40)$$

donde  $\rho_c$  es la densidad en el centro estelar.

- Con este cambio, Ec. 38 da la ecuación de Lane-Emden (**tarea**):

$$\frac{1}{\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta^2 \frac{\partial \theta(\zeta)}{\partial \zeta} \right) = -\theta^n(\zeta), \quad (41)$$

donde  $\zeta = \frac{r}{\alpha}$  y  $\alpha^2 = \frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2}$ .

.39

## 3.2 Gas degenerado

- Hasta ahora, con la excepción de los politropos, la ecuación de estado que hemos usado para describir el interior estelar es la del gas ideal, en el cual no hay interacción entre las partículas:

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT, \quad (42)$$

donde  $n$  es la densidad de número total de las  $A$  especies y  $\mu$  es el peso molecular promedio,

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^A m_A X_A}{\sum_{i=1}^A m_A}, \quad (43)$$

en que la suma incluye a los electrones. Recordamos que las concentraciones  $\{X_i\}_{i=1}^A$  corresponden a  $X_i = \frac{\rho_i}{\rho}$ .

- Se demuestra (**tarea**) que, para un plasma completamente ionizado (ver ejemplo 5.5 de Leblanc),

$$\mu = \frac{2}{3X + \frac{Y}{2} + 1}. \quad (44)$$

.40



- Sin embargo, los constituyentes de la materia estelar son fermiones, y cumplen el principio de exclusión de Pauli.
- A altas densidades es posible que la densidad de estados cuánticos para alguna especie, en particular para los electrones, sea comparable con su densidad de número. Entonces la interacción entre electrones, por el principio de exclusión, puede llegar a dominar la presión.

- En un tratamiento semi-clásico, el principio de incerteza  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ , o sea  $\Delta x \Delta p_x \sim h$  en el mejor de los casos, fuerza un volumen mínimo en el espacio de fase:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3. \quad (45)$$

- El número de estados  $\Phi$  por unidad de volumen y con momentum inferior a  $p$  es entonces

$$\Phi(p) = 2 \frac{1}{h^3} \frac{4}{3} \pi p^3, \quad (46)$$

contando los 2 estados de spin por celda en el espacio de fases.

- Consideramos ahora  $N$  electrones dentro de una caja dura con volumen  $V$ . Los electrones van llenando niveles de energías (con  $E_n \propto n^2$ ), y el ultimo nivel ocupado tiene la ‘energía de Fermi’  $E_F$ , correspondiente al momentum  $p_F$ .
- Tenemos entonces

$$N = \Phi(p_F) = V \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3, \quad (47)$$

y

$$p_F = \left[ \frac{3n}{8\pi} \right]^{1/3} h, \quad (48)$$

con  $n = N/V$ .

- Vemos que en un gas degenerado, la longitud de onda de De Broglie es comparable con  $n^{-1/3}$ , la distancia promedio entre partículas.

- Podemos estimar la energía interna en el límite no-relativista,  $\epsilon(p) = \frac{p^2}{2m}$ :

$$E_K = \int_0^{p_F} \epsilon(p) g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp, \quad (49)$$

donde  $g_s = 2$  para electrones. Sustituyendo  $N$  de Ec. 47 llegamos a (tarea):

$$E_K = N \frac{3p_F^2}{10m}. \quad (50)$$

- Recordamos ahora que en un gas no-relativista,  $P = \frac{2}{3} \frac{E_K}{V}$  (ver Ec. 25 del Cap. B):

$$P = n \frac{p_F^2}{5m}, \quad (51)$$

o bien, usando Ec. 48,

$$P = K_{NR} n^{5/3}, \text{ con } K_{NR} = \frac{h^2}{5m} \left[ \frac{3}{8\pi} \right]^{2/3} \quad (52)$$

.44

- En el caso ultra-relativista, i.e. si  $\epsilon(p) \sim pc$ , un desarrollo análogo al anterior, pero esta vez con  $P = \frac{1}{3} \frac{E_K}{V}$  (ver Cap. B), conduce a (**tarea**):

$$P = K_{UR} n^{4/3}, \text{ con } K_{UR} = \frac{hc}{4} \left[ \frac{3}{8\pi} \right]^{1/3}. \quad (53)$$

.45

### 3.3 Límite de Edington

- Los fotones también contribuyen otra fuente de presión en el interior estelar. Para un cuerpo negro, la presión de radiación ejercida en el recipiente es  $P_R = \frac{4}{3c} \sigma T^4$ .
- El momentum de un fotón es  $p = \frac{\epsilon}{c}$ , y vimos en el Cap. A que la aceleración debida a la absorción de fotones es

$$g_R = \frac{1}{c} \int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu. \quad (54)$$

- Tomando en cuenta  $g_R$ , la ec. de equilibrio hidrostático se escribe:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho[g - g_R]. \quad (55)$$

.46

- En un plasma completamente ionizado la principal fuente de opacidad es la dispersión de fotones por electrones, i.e. el “scattering” de Thomson. Este proceso tiene una sección eficaz aproximadamente constante  $\sigma_T \approx 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^{-2}$ .
- La opacidad correspondiente es

$$\kappa_\nu^T = \frac{n_e \sigma_T}{\rho}. \quad (56)$$

- De Ec. 54, para Thomson scattering

$$g_R = \frac{1}{c} \kappa_T H = \frac{1}{c} \kappa_T \frac{L}{4\pi R^2}. \quad (57)$$

- Si  $g_R > g$ , las capas estelares correspondientes ya no están ligadas y la estrella se rompe bajo el efecto de la presión de radiación (ver ejemplo 3.6 de Leblanc, **taea**).
- Con  $g = \frac{GM}{R^2}$  llegamos al límite de Eddington:

$$L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi Gc}{\kappa_T} M \quad (58)$$

---

.47

- Para una estrella de hidrógeno puro,  $n_e \approx \frac{\rho}{m_H}$  y  $\kappa_\nu^T = \frac{\sigma_T}{m_H} \approx 0.39 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ .
- La luminosidad de Eddington es entonces (**taea**):

$$\frac{L_{\text{Edd}}}{L_\odot} \approx 33100 \frac{M}{M_\odot}. \quad (59)$$

---

.48

## 4 Pulsaciones estelares

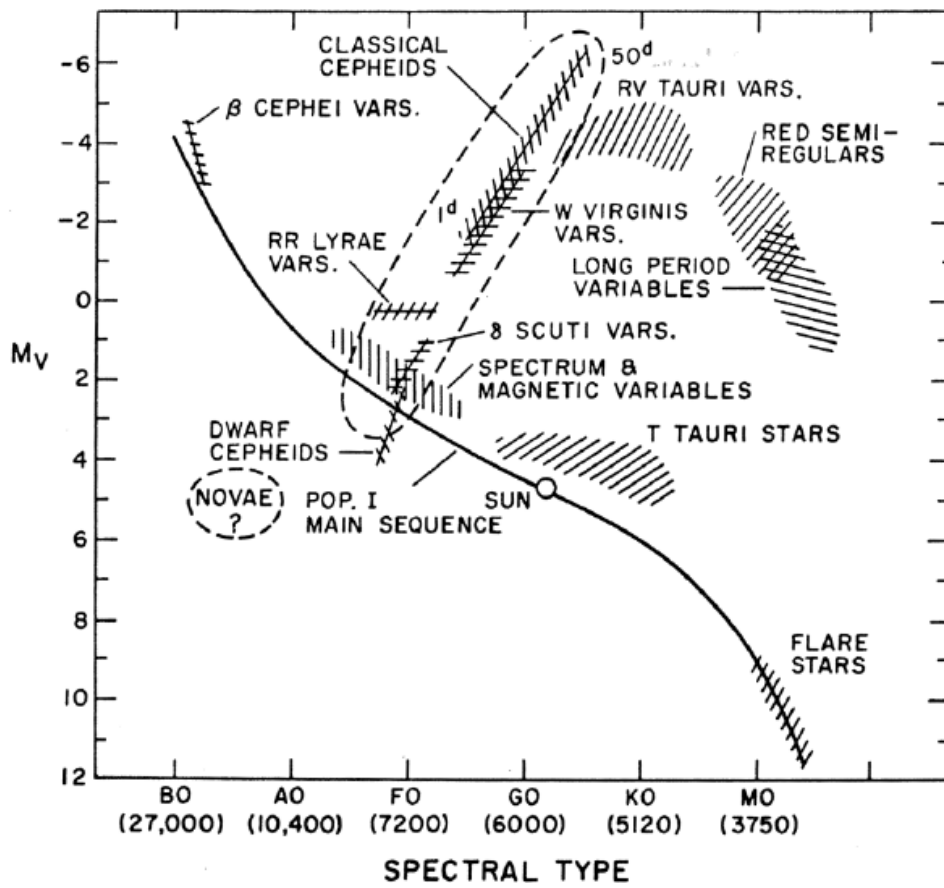
### 4.1 Estrellas variables

- Existe una gran variedad de estrellas variables. Cuando las variaciones estelares ocurren en una estrella solitaria, y se deben a cambio internos en su estructura, las variaciones se pueden ver como pulsaciones estelares.
- Algunas de las estrellas variables intrínsecamente son de especial importancia en astronomía por la existencia de relaciones entre período y luminosidad, que permiten estimar las distancias de cúmulos estelares y galaxias.

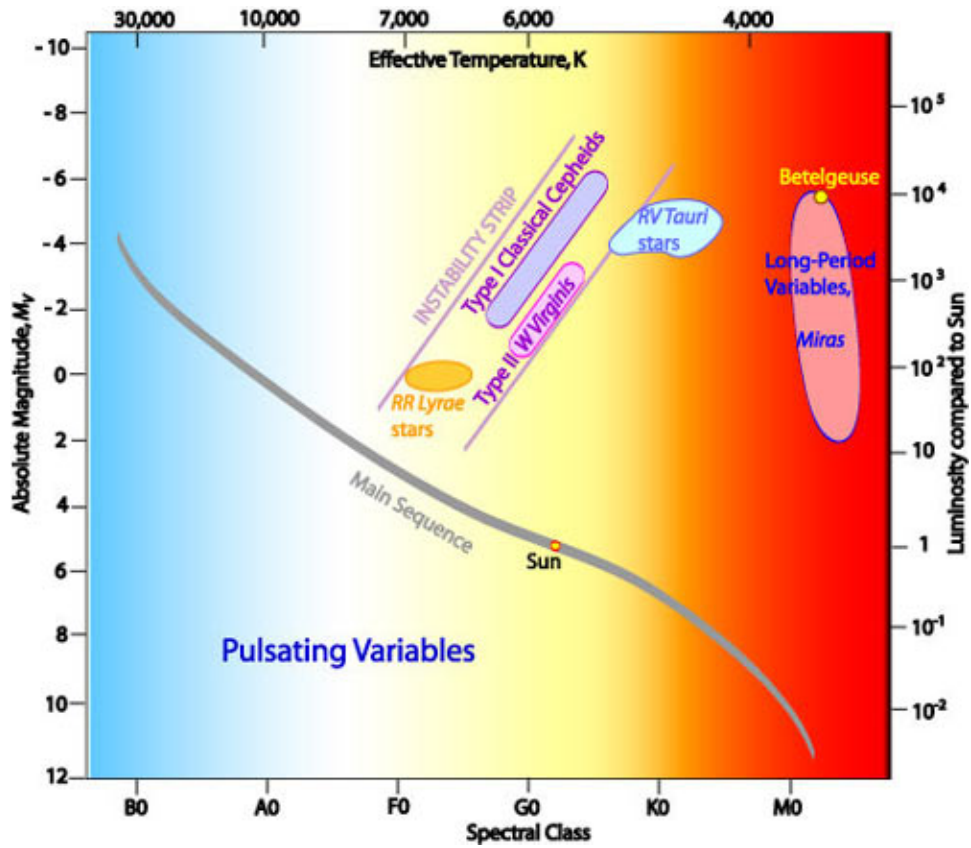
---

.49

- Resumen estrellas variables:



- Resumen estrellas pulsantes:



## 4.2 Estrellas pulsantes

- Ejemplos de estrellas variables: Ceféides (Cepheides), RR-Lyrae, variables Mira (o 'Long Period Variables' en general).
- Un ejemplo de estrellas pulsante es  $\delta$  Cephei (el prototipo de las Ceféides clásicas)

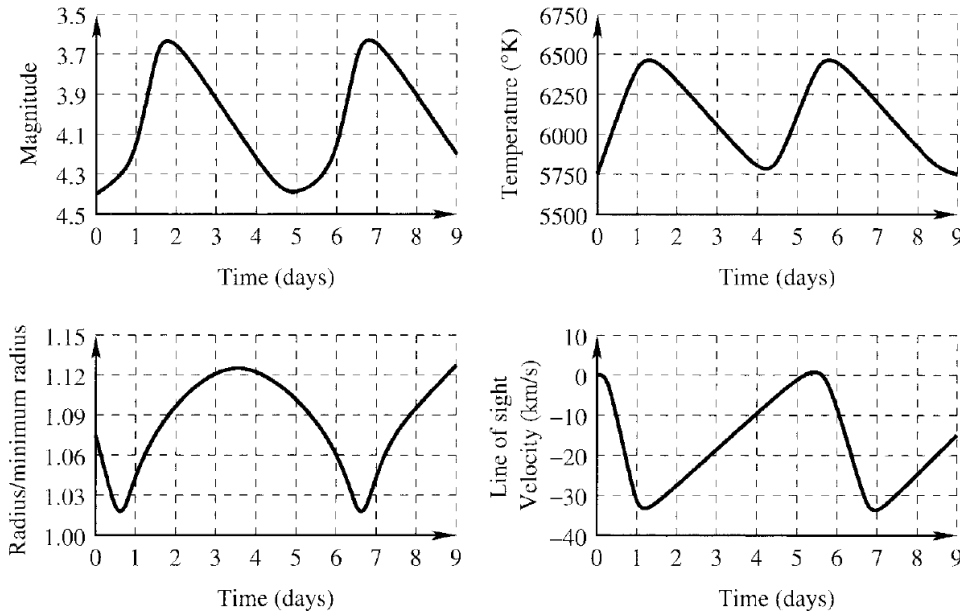


Figura  
reproducida de Leblanc.

.52

- Las pulsaciones Ceféides se deben a un ciclo de opacidad en las capas donde He está parcialmente ionizado. Dadas las condiciones físicas justas, la alta opacidad puede acumular calor que en lugar de transportarse por convección, se transporta mediante el modo de pulsación radial. Al empujarse la región de transición de He, baja su opacidad, y se escapa el calor acumulado volviendo al inicio del ciclo.
- Si consideramos que estas pulsaciones son modos radiales de ondas de sonido, podemos estimar el periodo típico, con el tiempo que demora el sonido en cruzar un diámetro estelar:

$$\tau \sim 2 \int_0^R \frac{1}{c_s} dr, \quad (60)$$

donde  $c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$  es la velocidad del sonido.

.53

- Para una estrella con densidad constante, usando equilibrio hidroestático se calcula  $P(r)$  para llegar a (tarea, ver Leblanc 5.7.3):

$$\tau = \sqrt{\frac{3\pi}{2G\gamma\rho}}. \quad (61)$$

- Esta relación predice que  $\tau \propto 1/\sqrt{\rho}$ , en concordancia con la observación que mientras más grande la estrella, más lento pulsa.

.54

- Problema: Use el teorema del virial para relacionar la temperatura interna promedio de una estrella (no-relativista) con su densidad promedio y su masa. Luego, imponga que la densidad promedio es comparable con la del gas degenerado de electrones, impidiendo así contracción gravitacional. Si la temperatura mínima para fusión nuclear es de  $\sim 10^7$ , cual sería aproximadamente la masa mínima para una estrella?
- Tema de presentación: ¿Cuál es la distancia mas lejana medida para una Cefeíde?