Examen
AS3101-1 2021B

Tiempo: **2 h**

Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Puede usar bibliografía & internet, pero no conversar del control, ni tampoco por WhatsApp.

I Modelo de Clayton (3.5 pt)

Queremos estimar la presión central de una estrella (masa $M_\star$ y radio $R_\star$), usando el modelo de Clayton. El gradiente de presión está dado por equilibrio hidrostático,

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = -\frac{\rho(r) G M(r)}{r^2}, \tag{1}$$

donde

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho(r). \tag{2}$$

Pero en el modelo de Clayton aproximamos

$$\frac{\partial P}{\partial r} \approx -\frac{4\pi}{3} r G \rho_c^2 e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}, \tag{3}$$

donde a es un parámetro por determinar (por ejemplo, para el Sol $a = R_\star/5{,}4$).

1. (0.7 pt) Escriba el gradiente de presión dado por Ec. 3 cerca del centro estelar, o sea en el límite $\frac{r}{a} \ll 1$, en función de la densidad en el centro ρ_c, y demuestre que es consistente con lo esperado de Ec. 1.

2. (0.5 pt) Explique porque, si $a \ll R_\star$, el gradiente de presión en Ec. 3 tiene el comportamiento esperado en $r = R_\star$.

3. (0.5 pt) Integre Ec. 3 para obtener el perfil $P(r)$, sujeto a la condición de borde $P(R_\star) = 0$.

4. (0.5 pt) Use Ecs. 1 y 2 para demostrar que

$$M(r) = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_c \Phi(x), \tag{4}$$

donde $x = \frac{r}{a}$ y

$$\Phi^2(x) = 6 \int_0^x x'^5 \exp(-x'^2) dx'. \tag{5}$$

5. (0.5 pt) Demuestre que si $\frac{a}{R_\star} \ll 1$, la masa total de la estrella se puede escribir

$$M(R_\star) = \frac{4\pi \rho_c a^3 \sqrt{6}}{3}. \tag{6}$$

Dato útil: resulta que $\Phi^2(x) = 6 - 3(x^4 + 2x^2 + 2)e^{-x^2}$.

6. `(0.8pt)` Concluya que la presión en el centro de la estrella es

$$P_c = \left[\frac{\pi}{36}\right]^{1/3} G M_\star^{2/3} \rho_c^{4/3}. \tag{7}$$

II Gradiente de temperatura y convección `(2.5pt)`

1. `(0.2pt)` En un medio opaco, como en interiores estelares, el flujo bolométrico radial está dado por la aproximación de Rosseland:

$$F(r) = 4\pi \int_0^\infty d\nu H_\nu(r) = -\frac{4\pi}{3\kappa_R \rho} \frac{\partial B}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r}, \tag{8}$$

donde $B = \int_0^\infty d\nu B_\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi}$. El flujo se relaciona con una luminosidad $L(r)$, correspondiente a la luminosidad que tendría la estrella si se truncara en r:

$$F(r) = \left(\frac{L(r)}{4\pi r^2}\right). \tag{9}$$

Demuestre que:

$$\frac{\partial T(r)}{\partial r} = -\frac{3\kappa_R \rho}{64\pi r^2 \sigma T^3} L(r). \tag{10}$$

2. `(0.5pt)` Usando Ec. 10 y el equilibrio hidrostático (Ec. 1), demuestra que, si el transporte de energía es solo radiativo (subíndice $_\mathrm{R}$), entonces para un gas ideal:

$$\nabla_\mathrm{R} \equiv \left.\frac{\partial \ln(T)}{\partial \ln(P)}\right|_\mathrm{R} = \frac{3\kappa_R}{64\pi r^2} \frac{1}{g} \frac{P}{\sigma T^4} L(r), \tag{11}$$

donde $g(r)$ es la aceleración de gravedad.

3. `(0.8pt)` Explique que si

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial r}\right|_\mathrm{adi} < \left.\frac{\partial \rho}{\partial r}\right|_\mathrm{R}, \tag{12}$$

entonces el transporte de energía será inestable y se gatillarán movimientos convectivos adiabáticos. Apoye su razonamiento con un dibujo mostrando el desplazamiento de un elemento de volumen en la estrella. ¿Qué significa que los movimientos de gas en la estrella sean adiabáticos?

4. `(0.5pt)` En un gas ideal sometido a un proceso adiabático también se cumple $P \propto \rho^\gamma$. Demuestre que

$$\nabla_\mathrm{adi} \equiv \left.\frac{\partial \ln(T)}{\partial \ln(P)}\right|_\mathrm{adi} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right). \tag{13}$$

5. `(0.5pt)` Demuestre que el criterio de inestabilidad convectiva de Schwarzschild (Ec. 12) también se puede escribir como

$$\nabla_\mathrm{R} > \nabla_\mathrm{adi}, \tag{14}$$

o sea

$$\frac{3\kappa_R}{64\pi r^2} \frac{1}{g} \frac{P}{\sigma T^4} L(r) > \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right). \tag{15}$$