# Estrellas

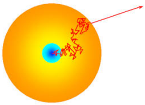
Simón Casassus
Astronomía, Universidad de Chile

http://www.das.uchile.cl/∼simon

# Part I

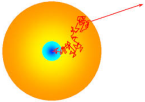
# Transfer Radiativo





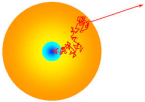
# Plan

1. **Ondas electromagnéticas**
   - Ecuaciones de Maxwell
   - Descomposición Espectral
2. **Intensidad específica**
   - Óptica geométrica
   - Intensidad específica y sus momentos
3. **Transferencia radiativa**
   - Emisión
   - Absorpción
   - Scattering
4. **Radiación termal**
5. **Medios discretos**
6. **Opacidad y profundidad óptica**
7. **Soluciones de la ecuación de transfer**
   - El eslabón homogéneo
   - Marcha aleatoria
   - Aproximación de Rosseland
   - Aproximación de Eddington



# Plan





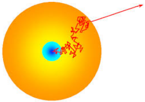

Ondas electromagnéticas
Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral
Intensidad específica
Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos
Transferencia radiativa
Emisión
Absorpción
Scattering
Radiación termal
Medios discretos
Opacidad y profundidad óptica
Soluciones de la ecuación de transfer
El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

# 1.1- Ecuaciones de Maxwell

- En resumen, las ecuaciones que describen la electrodinámica son:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho, \tag{1}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \tag{2}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{3}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \tag{4}$$

- Para medios lineales, $\vec{D}=\epsilon\vec{E}$ y $\vec{B}=\mu\vec{H}$.
- En el vacío, $\epsilon=\epsilon_\circ$ y $\mu=\mu_\circ$.



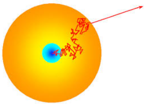
# 1.1- Ecuaciones de Maxwell

- Usando las ecuaciones de Maxwell se puede demostrar que:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_\circ}\left(-\vec{\nabla}\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right), \tag{5}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_\circ \vec{\nabla} \times \vec{J}. \tag{6}$$

- Vemos que, en el vacío, el campo electromagnético está descrito por la ecuación de ondas sin fuentes (i.e. homogénea).



# 1.1- Ecuaciones de Maxwell

- Otra consecuencia directa de las Ecuaciones de Maxwell es el Teorema de Poynting, o sea la conservación de la energía radiativa:

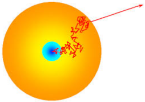
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}. \tag{7}$$

con

$$u = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}, \tag{8}$$

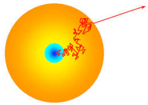
y

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \tag{9}$$



# Plan





Ondas electromagnéticas
Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral
Intensidad específica
Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos
Transferencia radiativa
Emisión
Absorpción
Scattering
Radiación termal
Medios discretos
Opacidad y profundidad óptica
Soluciones de la ecuación de transfer
El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

# 1.2- Descomposición Espectral

- En ausencia de fuentes, si descomponemos

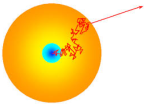
$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \vec{E}(\vec{x},\omega)e^{-iwt}, \tag{10}$$

las ecuaciones de Maxwell dan

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2)\left\{ \begin{array}{c} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} = 0. \tag{11}$$

- Si $\epsilon$ y $\mu$ son reales, las soluciones de Ec. 11 son $\propto e^{\pm ikx}$, con $k = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$
- Definimos la velocidad de fase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$, donde $n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_\circ\epsilon_\circ}}$ es el índice de refracción.
- Vemos que en general,

$$\left\{ \begin{array}{c} E_i \\ B_i \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{B}_i \end{array} \right\} e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x} - iwt}, \tag{12}$$

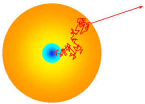


# 1.2- Descomposición Espectral

- Reconocemos la solución de d'Alembert,

$$\left\{ \begin{array}{c} E_i \\ B_i \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{B}_i \end{array} \right\} e^{\pm ik(\hat{n}\cdot\vec{x} - v_\phi t)}, \qquad (13)$$

  donde cada componente $i$ es de la forma $f(\hat{n}\cdot\vec{x} - v_\phi t) + g(\hat{n}\cdot\vec{x} + v_\phi t)$, y donde $\hat{n}$ es la dirección de propagación.
- Usando las ecuaciones de Maxwell se puede llegar a $\hat{n}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0$, $\hat{n}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0$ y $\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{c}\hat{n}\times\vec{\mathcal{E}}$.



## 1.2- Descomposición Espectral

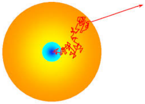
- Tanto $u$ como $\vec{S}$ dependen fuertemente del tiempo, incluso en sus componentes monocromáticas, con frecuencias que superan los MHz. En la práctica la medición de $\vec{S}$ involucra un promedio temporal $\langle(\cdots)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} dt'(\cdots)$.
- Se demuestra que, para componentes monocromáticas con frecuencia $\nu$ y $\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}\exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{x} - wt)\right]$,

$$\langle\vec{S}_\nu\rangle = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}|\mathcal{E}|^2\hat{n}. \tag{14}$$

y similarmente,

$$\langle u_\nu\rangle = \frac{1}{4}(\epsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^* + \frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}^*) = \frac{\epsilon}{2}|\mathcal{E}|^2. \tag{15}$$

- Finalmente $\langle\vec{S}_\nu\rangle = v_\phi\langle u_\nu\rangle\hat{n}$.



# 1.2- Descomposición Espectral

- La naturaleza corpuscular de la luz, descubierta por Planck y Einstein, nos dice que la energía radiativa está cuantizada, es decir

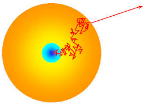
$$u_\nu = n_\nu h\nu, \tag{16}$$

  en que $n_\nu$ es la densidad de número de corpúsculos, i.e. “fotones”, con frecuencia $\nu$. Los fotones no tienen masa.
- De la expresión relativista para la energía total de una partícula,

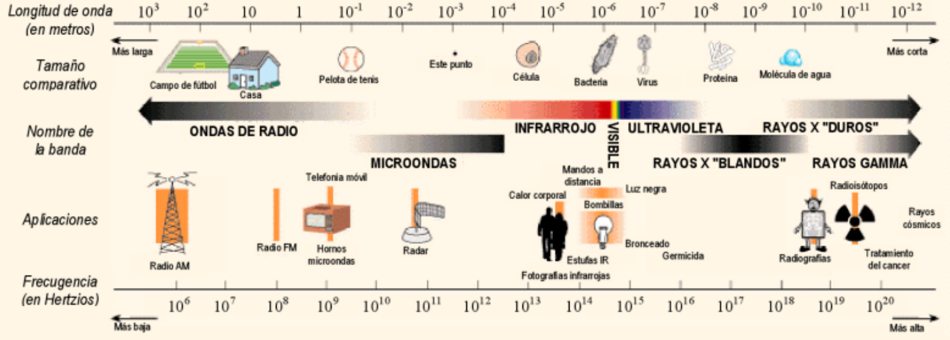
$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \tag{17}$$

  concluimos que el momentum asociado a un fotón es

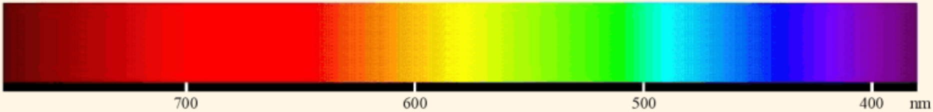
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{18}$$



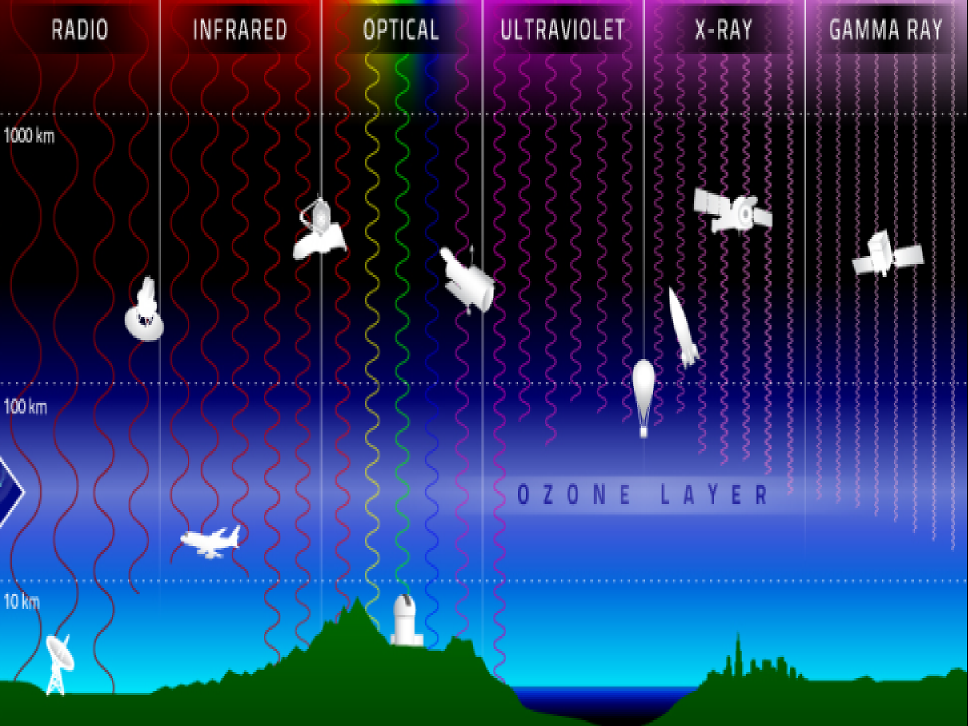
# ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

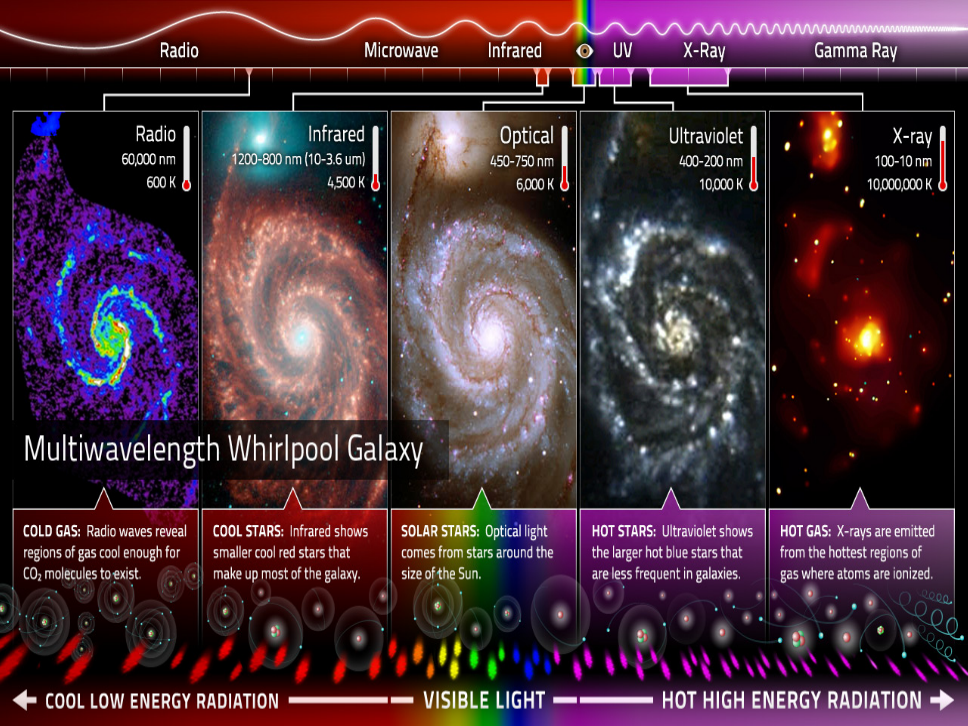


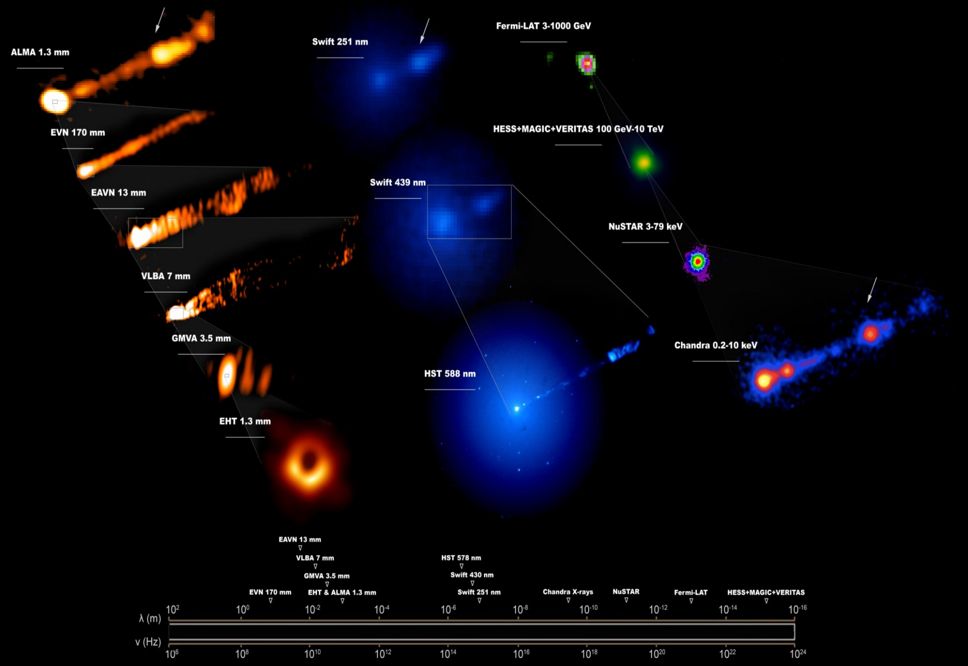

# ESPECTRO VISIBLE




| *Color* | Rojo | Naranja | Amarillo | Verde | Azul | Violeta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Longitud de onda (nm)* | 622 - 780 | 597 - 622 | 577 - 597 | 492 - 577 | 455 - 492 | 390 - 455 |
| *Frecuencia ($10^{14}$ HZ)* | 3.84 - 4.82 | 4.82 - 5.03 | 5.03 - 5.20 | 5.20 - 6.10 | 6.10 - 6.59 | 6.59 - 7.69 |

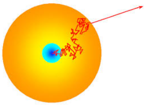

RADIO
INFRARED
OPTICAL
ULTRAVIOLET
X-RAY
GAMMA RAY
1000 km
100 km
10 km
OZONE LAYER


Radio
Microwave
Infrared
UV
X-Ray
Gamma Ray
Radio
60,000 nm
600 K
Infrared
1200-800 nm (10-3.6 um)
4,500 K
Optical
450-750 nm
6,000 K
Ultraviolet
400-200 nm
10,000 K
X-ray
100-10 nm
10,000,000 K
Multiwavelength Whirlpool Galaxy
COLD GAS: Radio waves reveal regions of gas cool enough for $CO_2$ molecules to exist.
COOL STARS: Infrared shows smaller cool red stars that make up most of the galaxy.
SOLAR STARS: Optical light comes from stars around the size of the Sun.
HOT STARS: Ultraviolet shows the larger hot blue stars that are less frequent in galaxies.
HOT GAS: X-rays are emitted from the hottest regions of gas where atoms are ionized.
COOL LOW ENERGY RADIATION
VISIBLE LIGHT
HOT HIGH ENERGY RADIATION


ALMA 1.3 mm
EVN 170 mm
EAVN 13 mm
VLBA 7 mm
GMVA 3.5 mm
EHT 1.3 mm
Swift 251 nm
Swift 439 nm
HST 588 nm
Fermi-LAT 3-1000 GeV
HESS+MAGIC+VERITAS 100 GeV-10 TeV
NuSTAR 3-79 keV
Chandra 0.2-10 keV
EAVN 13 mm
VLBA 7 mm
GMVA 3.5 mm
EVN 170 mm
EHT & ALMA 1.3 mm
HST 578 nm
Swift 430 nm
Swift 251 nm
Chandra X-rays
NuSTAR
Fermi-LAT
HESS+MAGIC+VERITAS
λ (m)
ν (Hz)
$10^{2}$ $10^{0}$ $10^{-2}$ $10^{-4}$ $10^{-6}$ $10^{-8}$ $10^{-10}$ $10^{-12}$ $10^{-14}$ $10^{-16}$
$10^{6}$ $10^{8}$ $10^{10}$ $10^{12}$ $10^{14}$ $10^{16}$ $10^{18}$ $10^{20}$ $10^{22}$ $10^{24}$

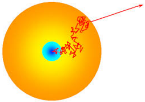
# Plan

1. **Ondas electromagnéticas**
   - Ecuaciones de Maxwell
   - Descomposición Espectral
2. **Intensidad específica**
   - Óptica geométrica
   - Intensidad específica y sus momentos
3. **Transferencia radiativa**
   - Emisión
   - Absorpción
   - Scattering
4. **Radiación termal**
5. **Medios discretos**
6. **Opacidad y profundidad óptica**
7. **Soluciones de la ecuación de transfer**
   - El eslabón homogéneo
   - Marcha aleatoria
   - Aproximación de Rosseland
   - Aproximación de Eddington



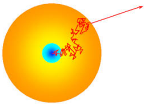
# Plan

1. **Ondas electromagnéticas**
   - Ecuaciones de Maxwell
   - Descomposición Espectral
2. **Intensidad específica**
   - Óptica geométrica
   - Intensidad específica y sus momentos
3. **Transferencia radiativa**
   - Emisión
   - Absorpción
   - Scattering
4. **Radiación termal**
5. **Medios discretos**
6. **Opacidad y profundidad óptica**
7. **Soluciones de la ecuación de transfer**
   - El eslabón homogéneo
   - Marcha aleatoria
   - Aproximación de Rosseland
   - Aproximación de Eddington



# 2.1-Óptica geométrica

- En óptica geométrica aproximamos el transporte de energía radiativa a lo largo de lineas rectas, o ‘rayos’, en dirección $\hat{k}$.
- Esto se puede hacer solo en el caso en que la longitud de onda $\lambda$ es mucho mas chica que el tamaño típico ‘*a*’ de las sub-estructuras en el medio de propagación. En otras palabras, no se puede usar para describir la interacción de luz visible con átomos, ni tampoco para describir los fenómenos de difracción que son evidentes cuando $\lambda \gg a$.



## 2.1- Óptica geométrica

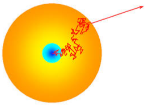
- Para ver lo anterior usamos el principio de incerteza para un rayo con $\hat{k} = \hat{z}$,

$$dx dp_x dy dp_y = p^2 dA d\Omega \gtrsim h^2, \tag{19}$$

y

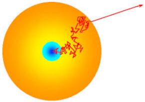
$$dA d\Omega \gtrsim \lambda^2. \tag{20}$$

- Vemos que si $dA \sim \lambda^2$, entonces $d\Omega \sim 1$, y no hay restricción en la dirección.
- Entonces la teoría de transfer radiativo es aplicable solo cuando $\lambda \ll a$.



# Plan

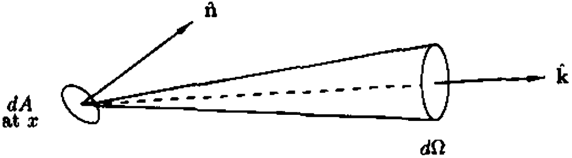


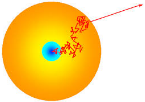


## 2.2- Intensidad específica y sus momentos

- Si $dE$ es la cantidad de energía radiativa que cruza un elemento de area $d\vec{A} = dA\hat{n}$ en la dirección $\hat{k}$, dentro de un ángulo sólido $d\Omega$, y con un rango de frecuencias $[\nu, \nu + d\nu]$, entonces la intensidad específica $I_\nu(\hat{k}, \vec{x}, t)$ está definida por:

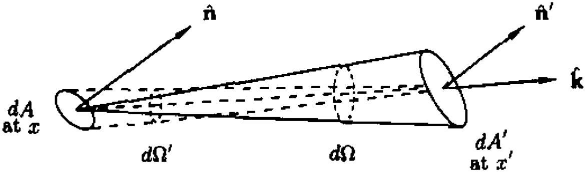
$$dE = I_\nu(\hat{k}, \vec{x}, t)\, \hat{k} \cdot \hat{n}\, dA\, d\Omega\, d\nu\, dt. \qquad (21)$$

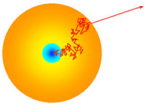


## 2.2- Intensidad específica y sus momentos

- En la ausencia de interacción con materia, $I(\hat{k}, \vec{x})$ es constante para todo punto $\vec{x}$ a lo largo del rayo $\hat{k}$. Demostración:



## 2.2- Intensidad específica y sus momentos

- La intensidad específica media en $\vec{x}$ es simplemente

$$J_\nu(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega I_\nu(\hat{k}, \vec{x}). \tag{22}$$

En coordenadas esféricas, con $\mu = \cos(\theta)$,

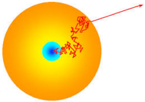
$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\mu=-1}^{1} d\mu \, I_\nu(\mu, \phi) \tag{23}$$

- Para relacionar $I_\nu$ con $u$, la densidad de energía almacenada en el campo electromagnético, introducimos la densidad de energía que corresponde a fotones viajando en dirección $\hat{k}$, i.e. $u_\nu(\hat{k})$, tal que el elto de energía que cruza un elto de área $d\vec{A} = dA\hat{n}$ es

$$dE = u_\nu(\hat{k}) c\hat{k} \cdot \hat{n} \, dA d\Omega d\nu dt, \tag{24}$$

y comparando con la definición de $I_\nu(\hat{k})$ (Ec. 21),

$$u_\nu(\hat{k}) = \frac{I_\nu}{c}. \tag{25}$$



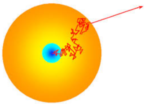
# 2.2- Intensidad específica y sus momentos

- La densidad de energía monocromática es entonces $u_\nu = \int d\Omega u_\nu(\hat{k})$, y

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \tag{26}$$

y la densidad de energía bolométrica es

$$u = \int d\nu u_\nu. \tag{27}$$



## 2.2- Intensidad específica y sus momentos

- El flujo neto en dirección $\hat{n}$ y en el punto $\vec{x}$ es

$$F_\nu(\hat{n}) = \int d\Omega I_\nu(\hat{k}, \vec{x}) \cos(\theta), \tag{28}$$

donde $\theta$ es el ángulo entre $\hat{k}$ y $\hat{n}$. Con $\mu = \cos(\theta)$,

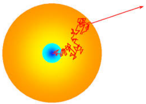
$$F_\nu(\hat{n}) = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\mu=-1}^{1} d\mu\, \mu I_\nu(\mu, \phi). \tag{29}$$

- Dado que el momentum de un fotón con frecuencia $\nu$ es $p = \epsilon/c$, con $\epsilon = h\nu$, el momentum que cruza una área $d\vec{A} = dA\hat{n}$ en dirección $\hat{k} = \vec{p}_\nu/\|\vec{p}_\nu\|$ y proyectado según $\hat{n}$ es

$$d\vec{p}_\nu \cdot \hat{n} = \frac{1}{c} \cos(\theta) dE_\nu, \tag{30}$$

con el elemento de energía espectral

$$dE_\nu = I_\nu(\hat{k}, \vec{x}, t)\, \hat{k} \cdot \hat{n}\, dA\, d\Omega\, dt. \tag{31}$$



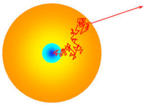
# 2.2- Intensidad específica y sus momentos

- Se define entonces la presión de radiación como la fuerza por unidad de área ejercida sobre el elemento de área $d\vec{A}$ si este absorbiese los fotones, con

$$
\begin{aligned}
P_\nu &= \int d\Omega \frac{d\vec{p}_\nu \cdot \hat{n}}{dAdt}, \\
&= \frac{1}{c} \int d\Omega \cos^2(\theta) I_\nu(\hat{k}, \vec{x}),
\end{aligned}
\tag{32}
$$

o, en términos de $\mu = \cos(\theta)$,

$$
P_\nu = \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\mu=-1}^{1} d\mu\, \mu^2 I_\nu(\mu, \phi). \tag{33}
$$

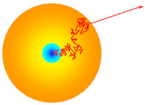


# 2.2- Intensidad específica y sus momentos

- Problema: considere una esfera de radio $R$ que emite una intensidad específica uniforme en su superficie $B$. Demuestre que el flujo en dirección $\hat{r}$ a una distancia $r$ del centro de la esfera es

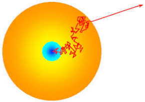
$$F = \pi B \left( \frac{R}{r} \right)^2 . \tag{34}$$

El flujo en la superficie de la esfera es entonces $F = \pi B$.



# Plan

1. **Ondas electromagnéticas**
   - Ecuaciones de Maxwell
   - Descomposición Espectral
2. **Intensidad específica**
   - Óptica geométrica
   - Intensidad específica y sus momentos
3. **Transferencia radiativa**
   - Emisión
   - Absorpción
   - Scattering
4. **Radiación termal**
5. **Medios discretos**
6. **Opacidad y profundidad óptica**
7. **Soluciones de la ecuación de transfer**
   - El eslabón homogéneo
   - Marcha aleatoria
   - Aproximación de Rosseland
   - Aproximación de Eddington

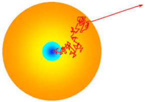


# 3-Transferencia radiativa

- En presencia de materia, el campo de intensidad específica puede cambiar con posición (y tiempo),

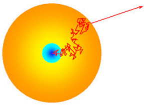
$$\frac{\partial I_\nu}{c\partial t} + \hat{k} \cdot \vec{\nabla} I_\nu = \text{fuentes} - \text{sumideros}. \qquad (35)$$

- Las fuentes corresponden a emisión de energía radiativa por materia, y también a reflección en la dirección $\hat{k}$.
- Los sumideros corresponden a la absorción de energía por materia, y también a reflección fuera de la direction $\hat{k}$.
- La luz reflejada también se llama luz dispersada, o bien ‘scattered light’.



# Plan





## 3.1-Emisión

- Un elemento de volumen $dV = ds\, dA$ emite una energía

$$dE = j_\nu d\nu dV dt d\Omega, \tag{36}$$

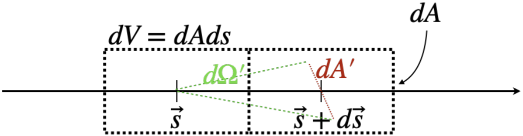
en dirección $d\Omega$, donde $j_\nu(\hat{k})$ es el coeficiente de emisión.

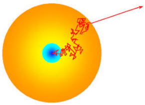
- De la definición de intensidad específica,

$$dE = dI_\nu(\hat{k}', \vec{s}, t)\, \hat{k}' \cdot \hat{n}' dA'\, d\Omega'\, d\nu\, dt, \tag{37}$$

para cualquier superficie $d\vec{A}'$ centrada en $\vec{s}$. Si elegimos $d\vec{A} = d\vec{A}'$, $\hat{k} = \hat{n} = \hat{ds}$ y $d\Omega = d\Omega'$ entonces $\hat{k} \cdot \hat{n} = 1$. Entonces el aumento de $I_\nu$ debido a la contribución de $dV$ en $\vec{s}$ es

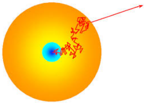
$$dI_\nu = j_\nu ds. \tag{38}$$



# Plan





## 3.2- Absorpción

- Para absorción pura, sin scattering ni emisión, y si la absorción es causada por partículas infinitamente pequeñas que no se apantallan unas a otras dentro de un volumen $dV = dsdA$, esperamos que

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds, \tag{39}$$

- El coeficiente de absorpción $\alpha_\nu$ puede relacionarse con la sección eficaz efectiva $\sigma_\nu$ de los absorbentes. La energía total absorbida en el volumen $dV$ es

$$dE = -I_\nu n \sigma_\nu dV d\Omega dt, \tag{40}$$

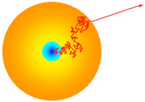
  donde el signo menos da cuenta de que $dE$ está siendo removido del campo de radiación.

- La diferencia en intensidad específica está dada por

$$dE = dI_\nu(\hat{k}, \vec{x}, t)\, dA\, d\Omega\, d\nu\, dt, \tag{41}$$

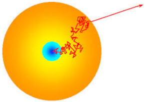
  de manera que

$$\alpha_\nu = n\sigma_\nu. \tag{42}$$



## Plan





## 3.3- Scattering

- La reflección de fotones, en lugar de su absorción, también disminuirá la intensidad específica a lo largo de un rayo $\hat{k}$. En analogía con el caso de absorción pura, la correspondiente disminución en intensidad específica será

$$dI_\nu = -\alpha_\nu^{\rm sca} I_\nu \, ds, \tag{43}$$

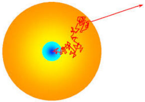
con $\hat{s} = \hat{k}$.

- Fotones que vienen de todas las direcciones también pueden ser reflejados hacia el rayo $\hat{k}$. Para describir la probabilidad de reflección desde la dirección $\hat{k}'$ hacia la dirección $\hat{k}$ usamos la función fase $\Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}')$ (también llamada la densidad de probabilidad de scattering),

$$dI_\nu = \alpha_\nu^{\rm sca} \oint \Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') I_\nu(\hat{k}') d\Omega' \, ds. \tag{44}$$

La función fase es normalizada y es simétrica:

$$\oint \Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') d\Omega' = 1 = \oint \Phi_\nu(\hat{k}', \hat{k}) d\Omega. \tag{45}$$



# 3.3- Scattering

- La ecuación de transferencia radiativa completa en un medio continuo es entonces:

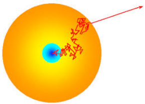
$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu^{\rm abs} I_\nu - \alpha_\nu^{\rm sca} I_\nu + \underbrace{\alpha_\nu^{\rm sca} \oint \Phi_\nu(\hat{k},\hat{k}') I_\nu(\hat{k}') d\Omega'}_{j_\nu^{\rm scat}}, \quad (46)$$

con $\hat{k} = \hat{s}$.

- Juntando términos, la Ec. 46 también se puede escribir

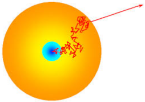
$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu^{\rm total} - \alpha_\nu^{\rm total} I_\nu, \quad (47)$$

con $j_\nu^{\rm total} = j_\nu + j_\nu^{\rm sca}$ y $\alpha_\nu = \alpha_\nu^{\rm abs} + \alpha_\nu^{\rm sca}$.



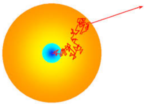
## Plan





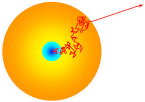
# 4 Radiación termal- El cuerpo negro

- Consideramos un recipiente cerrado $A$, cuya paredes se mantienen a temperatura $T$, constante.
- Nos preguntamos, ¿Cuál es el espectro de la radiación en el interior del recipiente? Esta se suele llamar ‘radiación de cuerpo negro’, porque resulta (como veremos mas abajo), que es también la radiación emitida por un cuerpo que no refleja nada.



# 4 Radiación termal- El cuerpo negro

- El espectro en el interior del recipiente debe ser universal, es decir solo depende de la temperatura $T$.
- Para verlo imaginemos que ponemos en contacto dos recipientes, $A$ y $A'$, de formas distintas pero con la misma temperatura. Además imaginamos que el punto de contacto es un filtro que deja pasar solo radiación de frecuencia $\nu$.
- Si las radiaciones en el interior de los recipientes fuesen distinta, es decir si $I_\nu \neq I'_\nu$, entonces habría un flujo neto de energía entre los dos recipientes, a pesar de compartir la misma temperatura. Esto sería una violación de la 2nda ley, por lo que necesariamente $I_\nu \equiv B_\nu(T)$ debe ser universal.
- La función $B_\nu(T)$ se llama *la función de Planck*. A continuación derivaremos $B_\nu(T)$.



# 4 Radiación termal- Ondas estacionarias

- Consideramos un recipiente cúbico de lado $a$, con paredes conductoras. En el interior del recipiente pueden existir ondas electromagnéticas estacionarias.
- Separando variables en la Ec. de ondas, para una componente $\psi(\vec{x}, t)$ del campo $(\vec{E}, \vec{B})$, $\psi = XYZT$, tenemos

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = 0.$$

- Para $\forall(\vec{x}, t) \;\Rightarrow$

$$\frac{X''}{X} = -k_1^2, \;\; \frac{Y''}{Y} = -k_2^2, \;\; \frac{Z''}{Z} = -k_3^2, \;\; \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2,$$

con

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

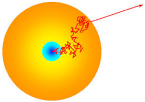
# 4 Radiación termal- Ondas estacionarias

- Condición de borde en una caja cúbica de lado $a$ con extremos fijos $\Rightarrow$ $X = B\sin(k_1 x)$, con $k_i = n_i\pi/a$, y

$$\psi = \sum_{n_1,n_2,n_3} A(n_1,n_2,n_3)e^{-i\omega(n_i,t)} \sin(\frac{n_1\pi x}{a})\sin(\frac{n_2\pi y}{a})\sin(\frac{n_3\pi z}{a}), \quad (48)$$

con

$$\omega(n_1,n_2,n_3) = \frac{c\pi}{a}\underbrace{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}_{n} = 2\pi\nu.$$



# 4 Radiación termal- Densidad de estados

- Número total de estados de modos normales $(\vec{E}, \vec{B})$, con frecuencia $\nu < \nu_\circ$, en volumen $\mathcal{V}$:

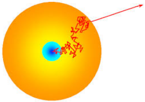
$$\phi(\nu_\circ) = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi n^3, \text{ con } n^3 = \left(\frac{2a\nu_\circ}{c}\right)^3.$$

- Densidad de estados en intervalo de frecuencia $d\nu$, volumen $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{N}(\nu) = \frac{d\phi(\nu)}{d\nu} = \frac{4\pi\nu^2}{c^3}\mathcal{V},$$

y la densidad de estados en intervalo de frecuencia $d\nu$, por unidad de volumen, es

$$\rho_\nu d\nu = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} d\nu.$$



# 4 Radiación termal- Tratamiento clásico

- La energía total almacenada en los modos de vibración del campo $(\vec{E}, \vec{B})$ es la suma de cada $u_\nu \mathcal{V} = \frac{\epsilon_\circ}{2}(E_x^2 + E_y^2)\mathcal{V}$.
- Para cada modo, el valor esperado de la energía en un intervalo $d\nu$ es

$$U_\nu = \mathcal{V}\langle u_\nu \rangle = \int d\mathcal{V} \int dE_x dE_y p(E_x, E_y) u_\nu,$$

$$\text{donde } p(E_x, E_y) \propto e^{-\frac{u_\nu \mathcal{V}}{kT}}.$$

- con 2 grados de libertad de polarización por modo (i.e. $E_x$ y $E_y$), cada uno contribuyendo un término cuadrático en la energía, el teorema de equipartición da $2 \times kT/2$ por modo.
- la densidad de modos Ec. 43 da la densidad de energía en un intervalo $d\nu$, y por unidad de volumen:

$$u_\nu = kT\rho(\nu) = kT\frac{4\pi\nu^2}{c^3} \quad \Rightarrow \text{ catástrofe UV.}$$

# 4 Radiación termal- Propuesta de Planck

- Planck hip1: sacar promedio por modo cambiando $\int \to \sum$,

$$\langle U \rangle = \int \mathcal{P}(U)\ U dU \ \ \rightarrow \ \ \sum P(U)\ U, \text{ con } U = n\mathcal{U}.$$

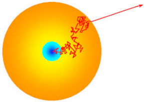
- Planck hip2: esperamos que $\mathcal{U}$ sea una función de la frecuencia, o sea $\mathcal{U} = \sum_i a_i \nu^i$, y por 'simplicidad' ponemos

$$\mathcal{U} = h\nu.$$

- Es decir, recuperamos el concepto de fotones (introducido posteriormente por Einsten en 1905), en que la energía total en un modo con frecuencia $\nu$ es

$$U_\nu = nh\nu, \tag{49}$$

con $n$ entero.



# 4 Radiación termal- Propuesta de Planck

- Con esta hipótesis,

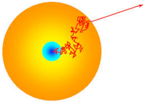
$$\langle U_\nu \rangle = \sum_n \overbrace{nh\nu}^{U_\nu} \quad \underbrace{\frac{e^{-\beta nh\nu}}{\sum'_n e^{-\beta n' h\nu}}}_{\text{probabilidad del estado } n} \tag{50}$$

el cálculo (ver cátedra) da $\langle U_\nu \rangle = -\frac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1}$.

- Usando ahora la densidad de modos de Ec. 43, la densidad de energía es $u_\nu = 2\rho(\nu)\langle U_\nu \rangle$ (el factor 2 da cuenta de los 2 estados de polarización del fotón), y obtenemos $u_\nu c = 4\pi B_\nu$, con

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]}.$$

Una comparación con el experimento permite ajustar $h = 6.62\ 10^{-34}$ J s.



# 4 Radiación termal- Propiedades de la función de Planck

- Ley de Wien:

$$\left.\frac{dB_\nu}{d\nu}\right|_{\nu \max} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{h\nu}{kT} \approx 4.965,$$

$\boxed{\frac{\lambda_{\max}}{\mathrm{cm}}\frac{T}{\mathrm{K}} = 0.29,}$ con $\lambda_{\max} = c/\nu_{\max}$. OJO: $B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$.

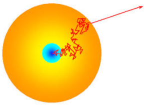
- Ley de Stefan-Boltzmann:

$$\int B_\nu d\nu = B(T) = \frac{2h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \overbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx}^{\pi^4/15},$$

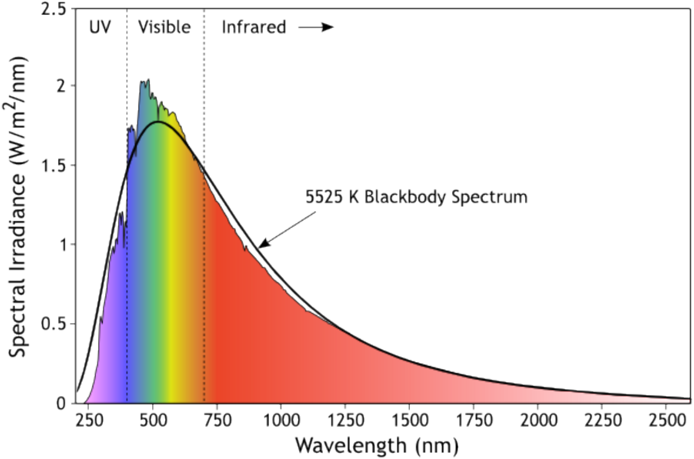
$\boxed{B(T) = aT^4,}$ con $\sigma = a\pi = 5.67\ 10^{-8}$ W m$^{-2}$ K$^{-4}$. Notar que $\pi B(T)$ es el flujo por unidad de área.

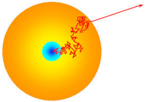
- Ley de Rayleigh-Jeans:

$$\lim_{h\nu \ll kT} B_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2}kT \text{ caso clásico, } h \to 0.$$



# Ejemplo: espectro solar

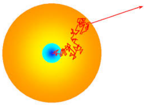


# 4 Radiación termal- Ley de Kirchoff

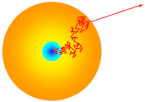
- En equilibrio termodinámico, $I_\nu(\hat{k}, \vec{x}) = B_\nu(T)$ y como el campo de temperatura debe ser uniforme, $\frac{dI_\nu}{ds} = 0$. Como la función de fase está normalizada, al integrar la ecuación de transfer en ángulo solido obtenemos la ley de Kirchoff:

$$j_\nu = \alpha_\nu^{\text{abs}} B_\nu. \tag{51}$$



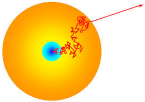
# Plan

1. **Ondas electromagnéticas**
   - Ecuaciones de Maxwell
   - Descomposición Espectral
2. **Intensidad específica**
   - Óptica geométrica
   - Intensidad específica y sus momentos
3. **Transferencia radiativa**
   - Emisión
   - Absorpción
   - Scattering
4. **Radiación termal**
5. **Medios discretos**
6. **Opacidad y profundidad óptica**
7. **Soluciones de la ecuación de transfer**
   - El eslabón homogéneo
   - Marcha aleatoria
   - Aproximación de Rosseland
   - Aproximación de Eddington



# 5- Medios discretos

- En un medio discreto el acoplamiento entre radiación y materia ocurre mediante transiciones radiativas, cada una de las cuales lleva un perfil de linea $\phi(\nu)$ angosto y centrado en la frecuencia de la transición $\nu_\circ$.
- Las tasas de transiciones radiativas se pueden describir usando los coeficientes de Einstein:
  - $A_{ji}$: Probabilidad de decaimiento espontáneo por unidad de tiempo y por absorbente (las unidades de $A$ son $s^{-1}$).
  - $B_{ij}\bar{J}$: Probabilidad de absorción por unidad de tiempo y por absorbente, donde $\bar{J} = \int d\nu\phi(\nu)J_\nu$ es la intensidad específica media promediada en frecuencia (de manera que las unidades MKS de $B$ son $s^{-1}/(\mathrm{W\,m^{-2}sr^{-1}})$).
  - $B_{ji}\bar{J}$: Probabilidad de emisiones estimuladas por unidad de tiempo.



# 5- Medios discretos

- Los perfiles de lineas $\phi(\nu)$ se pueden describir con Lorentzianas, y sus anchos (o sea los anchos de linea), $\Delta\nu$, están directamente relacionados con la tasa de decaimiento via el principio de incerteza tiempo-energía, $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$:

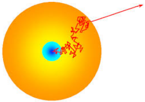
$$\Delta t \sim \frac{1}{A_{ji}} \sim \frac{1}{\Delta\nu}. \tag{52}$$

- El principio de balance detallado relaciona los coeficientes de Einstein:

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji}, \tag{53}$$

y

$$A_{ji} = \frac{2h\nu_{ji}^3}{c^2} B_{ji}. \tag{54}$$



# 5- Medios discretos

- En un medio discreto y homogeneo, la ecuación de RT en su forma compacta (Ec. 47) también es válida, y los coeficientes de emisión y absorción están directamente relacionados con los coeficientes de Einstein. En este caso la función fase es constante, $\Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') = 1/(4\pi)$.
- El coeficiente de emisión es

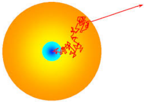
$$j_\nu = \frac{h\nu_\circ}{4\pi} n_j A_{ji} \phi(\nu). \quad (55)$$

Este coeficiente incluye lo que se llamaría 'scattering' para las lineas: una des-excitación consiguiente a la absorción de un fotón.

- El coeficiente de absorción es

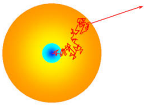
$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_\circ}{4\pi} (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) \phi(\nu). \quad (56)$$

Notar que el coeficiente de emisión estimulada actúa como absorción negativa.



# Plan





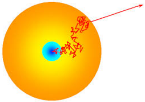
# 6- Opacidad y profundidad óptica

- Es común el uso de opacidades $\kappa$ en lugar de los coeficientes de absorpción $\alpha$, con $\alpha = \kappa\rho$, donde $\rho$ es la densidad de masa.
- También definimos la profundidad óptica a lo largo de un rayo,

$$\tau_\nu^{\mathrm{abs}} = \int ds\, \alpha^{\mathrm{abs}} = \int ds \rho \kappa^{\mathrm{abs}}, \tag{57}$$

y

$$\tau_\nu^{\mathrm{sca}} = \int ds\, \alpha^{\mathrm{sca}} = \int ds \rho \kappa^{\mathrm{sca}}. \tag{58}$$



# 6- Opacidad y profundidad óptica

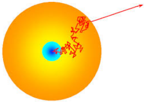
- El decaimiento exponencial en el caso de absorpción pura sugiere que $\exp(-\tau_\nu^{\mathrm{abs}})$ es la probabilidad de que un fotón sobreviva la profundidad óptica $\tau_\nu^{\mathrm{abs}}$ sin ser absorbido. Esto nos permite estimar la profundidad óptica media recorrida por los fotones:

$$\langle \tau_\nu \rangle = \int_0^\infty \tau_\nu \exp(-\tau_\nu) d\tau_\nu = 1. \tag{59}$$

- El libre camino medio de los fotones $l_\nu$ es la distancia correspondiente, i.e.:

$$l_\nu^{\mathrm{abs}} = \frac{1}{\alpha_\nu^{\mathrm{abs}}} = \frac{1}{n\sigma_\nu^{\mathrm{abs}}}, \tag{60}$$

y similarmente para scattering.



# 6.0- Scattering

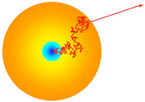
- Cambiando variables con $d\tau_\nu = (\alpha_\nu^{\rm abs} + \alpha_\nu^{\rm sca})ds$, la ecuación de transferencia se puede escribir como

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \underbrace{\frac{j_\nu^{\rm abs} + j_\nu^{\rm sca}}{\alpha_\nu^{\rm abs} + \alpha_\nu^{\rm sca}}}_{S_\nu} - I_\nu, \tag{61}$$

donde hemos definido la función fuente $S_\nu$.

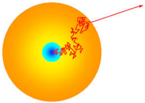
- En ausencia de scattering, i.e. si $\alpha_\nu^{\rm sca} = 0$, entonces $S_\nu = B_\nu$ para procesos termales (por la ley de Kirchoff).
- Para una función fase isotrópica, i.e. si $\Phi_\nu(\hat{k}, \hat{k}') = 1/(4\pi)$, la función fuente es

$$S_\nu = \frac{j_\nu^{\rm abs} + \alpha_\nu^{\rm sca} J_\nu}{\alpha_\nu^{\rm abs} + \alpha_\nu^{\rm sca}} \tag{62}$$



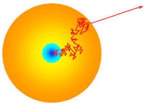
# Plan

1. **Ondas electromagnéticas**
   - Ecuaciones de Maxwell
   - Descomposición Espectral
2. **Intensidad específica**
   - Óptica geométrica
   - Intensidad específica y sus momentos
3. **Transferencia radiativa**
   - Emisión
   - Absorpción
   - Scattering
4. **Radiación termal**
5. **Medios discretos**
6. **Opacidad y profundidad óptica**
7. **Soluciones de la ecuación de transfer**
   - El eslabón homogéneo
   - Marcha aleatoria
   - Aproximación de Rosseland
   - Aproximación de Eddington



# Plan

1. **Ondas electromagnéticas**
   - Ecuaciones de Maxwell
   - Descomposición Espectral
2. **Intensidad específica**
   - Óptica geométrica
   - Intensidad específica y sus momentos
3. **Transferencia radiativa**
   - Emisión
   - Absorpción
   - Scattering
4. **Radiación termal**
5. **Medios discretos**
6. **Opacidad y profundidad óptica**
7. **Soluciones de la ecuación de transfer**
   - El eslabón homogéneo
   - Marcha aleatoria
   - Aproximación de Rosseland
   - Aproximación de Eddington



## 7.1- El eslabón homogéneo

- En el comúnmente usado, pero rara vez exacto, caso sin scattering, la ecuación de transferencia radiativa Ec. 61 es

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu, \tag{63}$$

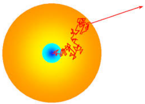
donde $S_\nu = j_\nu^{\mathrm{abs}}/\alpha_\nu^{\mathrm{abs}}$. Para emisión termal, $S_\nu = B_\nu$.

- Es directo mostrar que la solución de Ec. 63 es (tarea)

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} d\tau'_\nu e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu). \tag{64}$$

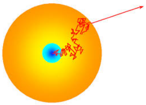
- Para un eslabón uniforme, con constante $S_\nu$,

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \tag{65}$$



# Plan



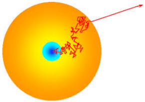


## 7.2- Marcha aleatoria

- Si un medio es ópticamente grueso en scattering esperamos que un fotón seguirá una marcha aleatoria hasta su absorción o eventual escape del medio. El desplazamiento neto es $\vec{R} = \sum_i \vec{s}_i$, y la dispersión en el desplazamiento es $\sigma(\vec{R}) \equiv (\langle \|\vec{R}\|^2 \rangle)^{1/2} = \sqrt{N}(\langle \|\vec{s}\|^2 \rangle)^{1/2}$. Con $\langle \|\vec{s}\|^2 \rangle)^{1/2} \sim l$, el libre camino medio del fotón, tenemos $\sigma(R) \sim \sqrt{N} l$.
- La probabilidad de absorpción en cada paso es

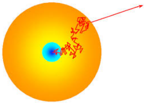
$$\epsilon = \frac{\alpha_\nu^{\text{abs}}}{\alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}}}. \tag{66}$$

  Como todos los pasos son estadísticamente independientes, la probabilidad de absorción para $N$ pasos es simplemente $N\epsilon_\nu$, y el número promedio de pasos antes de la absorción es $1/\epsilon_\nu$.
- Entonces, para un medio infinito, $\sigma(R) = l/\sqrt{\epsilon_\nu}$, lo cual representa una escala de termalización: si un medio es más grande que $\sigma(R)$, entonces se dice que es efectivamente grueso ya que la mayoría de los fotones serán absorbidos en el medio.



# Plan






Ondas electromagnéticas
Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral
Intensidad específica
Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos
Transferencia radiativa
Emisión
Absorpción
Scattering
Radiación termal
Medios discretos
Opacidad y profundidad óptica
Soluciones de la ecuación de transfer
El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

## 7.3- Aproximación de Rosseland

- Luego del caso extremo del equilibrio termodinámico, un grado mas suave de idealización es el de un equilibrio termodinámico ‘local’, con pequeñas desviaciones de $I_\nu$ relativo a $B_\nu(T)$.
- La ecuación de transfer para scattering isotrópico se puede escribir

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\overbrace{(\alpha_\nu^{\rm abs} + \alpha_\nu^{\rm scat})}^{\alpha_\nu}(I_\nu - S_\nu), \tag{67}$$

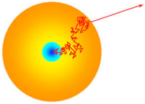
y en estado estacionario, $\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \hat{s}\cdot\vec{\nabla} I_\nu$.

- Para procesos radiativos termales, $S_\nu = B_\nu$, de manera que

$$I_\nu = B_\nu - \underbrace{\frac{1}{\alpha_\nu}\frac{\partial I_\nu}{\partial s}}_{\rm correccion\ de\ 1er\ orden}. \tag{68}$$

- Si la corrección de primer orden es pequeña, aproximamos $\frac{\partial I_\nu}{\partial s} \approx \frac{\partial B_\nu}{\partial s}$, y

$$I_\nu \approx B_\nu - \frac{1}{\alpha_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial s}. \tag{69}$$



# 7.3- Aproximación de Rosseland

- Para el flujo $\vec{F}_\nu = \oint I_\nu \hat{k} d\Omega$ integramos en ángulo sólido. Concretamente,

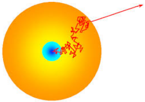
$$\vec{F}_\nu \cdot \hat{z} \equiv F_\nu = \oint \hat{k} \cdot \hat{z}\, I_\nu(\Omega) d\Omega = \oint \cos(\theta) I_\nu(\Omega) d\Omega. \quad (70)$$

- Para una aplicación en geometría plano-paralela necesitamos escribir Ec. 69 en términos de $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial s} = \hat{s} \cdot \vec{\nabla} B_\nu = \mu \frac{\partial B_\nu}{\partial z}. \quad (71)$$

- Una integración directa de Ec. 69 arroja

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}. \quad (72)$$



# 7.3- Aproximación de Rosseland

- Para el flujo bolométrico integramos Ec. 72 en frecuencia:

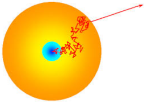
$$F(z) = \int_0^\infty d\nu F_\nu(z) = -\frac{4\pi}{3}\frac{\partial T}{\partial z}\int_0^\infty d\nu \frac{1}{\alpha_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}. \qquad (73)$$

- Introducimos el coeficiente de absorción de Rosseland,

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int_0^\infty d\nu \frac{1}{\alpha_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}}{\int_0^\infty d\nu \frac{\partial B_\nu}{\partial T}}, \qquad (74)$$

  y notamos que $\int_0^\infty d\nu \frac{\partial B_\nu}{\partial T} = \frac{4}{\pi}\sigma T^3$.
- Finalmente, el flujo en LTE es:

$$\vec{F}\cdot\hat{s} = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R}\frac{\partial T}{\partial s}. \qquad (75)$$



# 7.3- Aproximación de Rosseland

- También podemos escribir Ec. 75 como

$$\vec{F} \cdot \hat{s} = -\frac{4\sigma}{3\alpha_R} \frac{\partial T^4}{\partial s}, \tag{76}$$

o bien

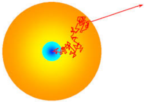
$$\vec{F} \cdot \hat{s} = -\frac{4c}{3\alpha_R} \frac{\partial u}{\partial s}., \tag{77}$$

Donde $u$ es la densidad de energía radiativa bolométrica.

- Es interesante notar la similitud entre la aproximación de Rosseland y la ley de Fick para difusión:

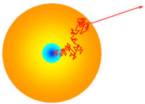
$$\text{flux} \sim -D\vec{\nabla} \text{ cantidad siendo difundida}, \tag{78}$$

en este caso $D = \frac{1}{3}cl$, donde $l \equiv 1/\alpha_R$ sería un libre camino medio efectivo.



# Plan





Ondas electromagnéticas
Ecuaciones de Maxwell
Descomposición Espectral
Intensidad específica
Óptica geométrica
Intensidad específica y sus momentos
Transferencia radiativa
Emisión
Absorpción
Scattering
Radiación termal
Medios discretos
Opacidad y profundidad óptica
Soluciones de la ecuación de transfer
El eslabón homogéneo
Marcha aleatoria
Aproximación de Rosseland
Aproximación de Eddington

## 7.4- Aproximación de Eddington

- En geometría plano-paralela, los momentos angulares de radiación,

$$\left\{ \begin{array}{c} cu_\nu \\ \vec{F}_\nu \\ c\mathbf{P}_\nu \end{array} \right\} \equiv \oint \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \hat{k} \\ \hat{k}\hat{k} \end{array} \right\} I_\nu(\hat{k}) d\Omega, \tag{79}$$

introducidos en Sec. 2, se pueden resumir como

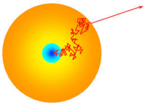
$$\left\{ \begin{array}{c} J_\nu \\ H_\nu \\ K_\nu \end{array} \right\} \equiv \oint_{-1}^{1} \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \end{array} \right\} I_\nu(\mu) d\mu, \tag{80}$$

es decir $J_\nu = c\frac{u_\nu}{4\pi}$, $H_\nu = \frac{\vec{F}_\nu|_z}{4\pi}$, $K_\nu = c\frac{\mathbf{P}_\nu|_{zz}}{4\pi}$.

- En el tratamiento que conduce a la aproximación de Eddington, suponemos que $I_\nu(\mu)$ es casi isotrópica y expandimos hasta primer orden en $\mu$:

$$I_\nu = a_\nu + b_\nu \mu, \tag{81}$$

i.e. similar a un término dipolar $b\mu$ modificando el monopolo $a$.



# 7.4- Aproximación de Eddington

- Evaluación directa de Ec. 80 usando Ec. 81 conduce a $J_\nu = a_\nu$, $H_\nu = \frac{b_\nu}{3}$ y $K_\nu = \frac{a_\nu}{3}$ (tarea).
- Entonces tenemos,

$$K_\nu = \frac{1}{3} J_\nu, \tag{82}$$

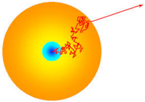
  igual que para radiación termal, para la cual la presión de radiación es $p_\nu = \frac{1}{3} u_\nu$, pero aquí en un caso mas general. La Ec. 82 se conoce como aproximación de Eddington.
- La ecuación de RT plano-paralela que sigue de Ec. 67 y Ec. 71 es

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = -\alpha_\nu (I_\nu - S_\nu), \tag{83}$$

  o

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = -(I_\nu - S_\nu), \tag{84}$$

  donde la función fuente está dada por Ec. 62 para el caso de scattering isotrópico.



## 7.4- Aproximación de Eddington

- Ahora tomamos $\int d\mu$(Ec. 84),

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \tau_\nu} = J_\nu - S_\nu, \quad (85)$$

y $\int d\mu\mu$(Ec. 84),

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial \tau_\nu} = H_\nu. \quad (86)$$

- Usando la aproximación de Eddington (Ec. 82), obtenemos una ecuación para $J_\nu$ en función de $S_\nu$:

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2 J_\nu}{\partial \tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu, \quad (87)$$

- En términos del albedo $\omega_\nu = 1 - \epsilon_\nu$ (ver Ec. 66),

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2 J_\nu}{\partial \tau_\nu^2} = \epsilon(\nu)(J_\nu - B_\nu), \quad (88)$$

lo cual, si las propiedades del medio son conocidas, es una ecuación de 2ndo orden para $J_\nu(\tau_\nu)$. Si es posible resolver Ec. 88 para $J_\nu(\tau_\nu)$, tenemos $I_\nu$ por integración de Ec. 84.