

# Estrellas

Simón Casassus

Astronomía, Universidad de Chile

<http://www.das.uchile.cl/~simon>

- I Transfer Radiativo
- II Propiedades generales
- III Atmósferas estelares
- IV Interiores estelares
- V Evolución estelar

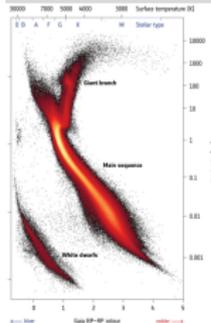
# Part II

## Propiedades generales

1 Temperatura efectiva y magnitud

2 Clasificación espectral

3 Formación Estelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

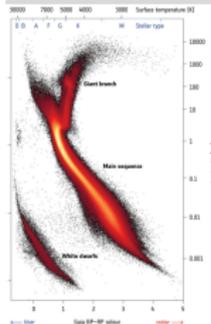
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

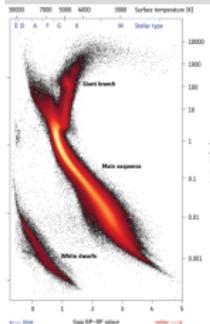
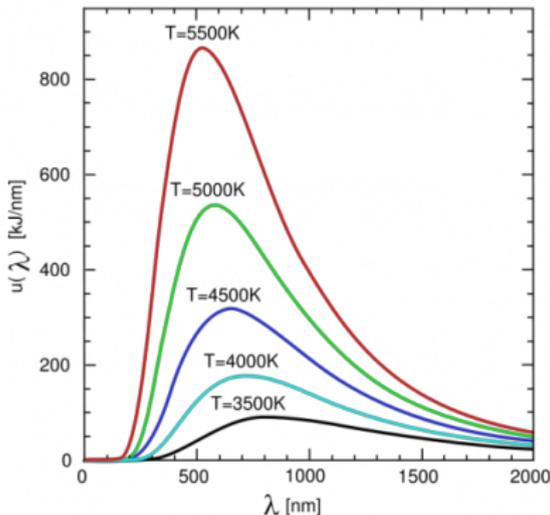
Contracción protoestelar

# 1- Temperatura efectiva

- La temperatura efectiva  $T_{\text{eff}}$  de una estrella con radio  $R_*$  y luminosidad  $L_*$  está dada por la temperatura del cuerpo negro equivalente, es decir :

$$T_{\text{eff}} = \left( \frac{L_*}{4\pi R_*^2 \sigma} \right)^{1/4} \quad (1)$$

- Por la ley de Wien, la longitud de onda típica donde una estrella emite el máximo de radiación corresponde al máximo del cuerpo negro asociado.



## Temperatura efectiva y magnitud

### Clasificación espectral

- Líneas espectrales
- Tipos espectrales
- Diagrama de Hertzsprung-Russell

### Formación Estelar

- Contracción gravitacional
- Teorema de Virial
- Condiciones de colapso
- Contracción protoestelar

# 1- Magnitudes estelares

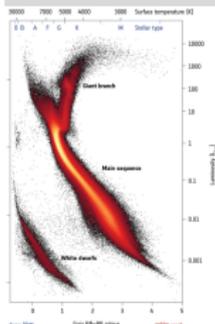
- La magnitud observada  $m^*$  de una estrella en una cierta longitud de onda  $\lambda$  es

$$m_{\lambda}^* \equiv -2.5 \log_{10} \left( \frac{F_{\lambda}^*}{F_{\lambda}^{\text{Vega}}} \right), \quad (2)$$

donde  $F_{\lambda}^{\text{Vega}}$  es la densidad de flujo observado para la estrella Vega (de manera que Vega tiene magnitud 0 en todo  $\lambda$ ).

- La magnitud absoluta  $M^*$  de una estrella es la magnitud observada si la distancia a la estrella fuese de  $d = 10$  pc, donde pc es 'parsec' y 1 pc corresponde a 3.26 años-luz, y es la distancia a la que una unidad astronómica subtende un ángulo de 1 segundo de arco (arcsec).
- Se puede ver fácilmente ( **tarea** ) que:

$$m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d}{10} \right). \quad (3)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema de Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

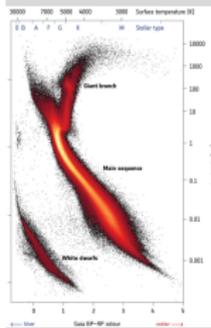
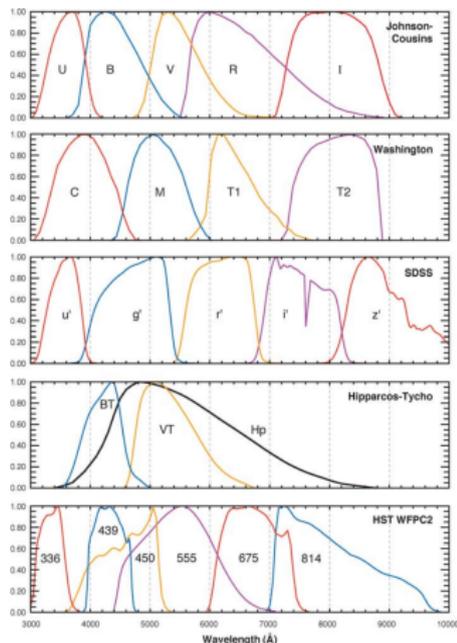
# 1- Magnitudes estelares

En la práctica, todas las mediciones de densidad de flujo y magnitudes tienen un cierto 'ancho de banda', dado por la función de transmisión del instrumento  $T(\nu)$ , con

$0 \leq T(\nu) \leq 1$ :

$$F_{\nu_o} = \int_0^{\infty} d\nu T(\nu) F_{\nu}, \quad (4)$$

y donde  $\nu_o = \frac{\int_0^{\infty} d\nu \nu T(\nu)}{\int_0^{\infty} d\nu T(\nu)}$ , y análogamente para  $\lambda$ .



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

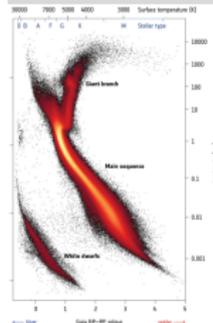
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

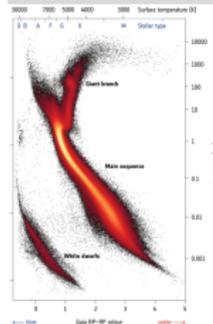
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

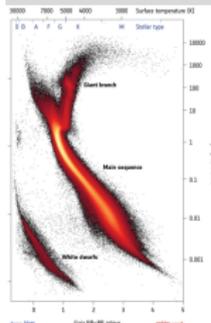
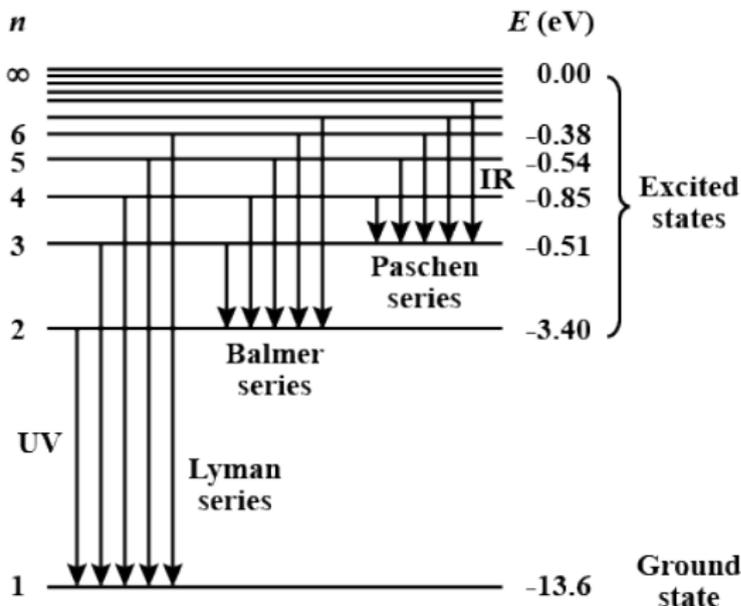
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 2.1- Líneas espectrales

- El transfer radiativo en la superficie estelar resulta en la formación de líneas que corresponden a los átomos, iones o moléculas que la constituyen.
- Por ejemplo, en el caso de hidrógeno las transiciones en el espectro visible corresponden a la 'serie de Balmer'.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

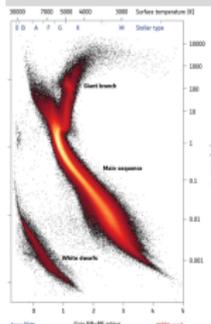
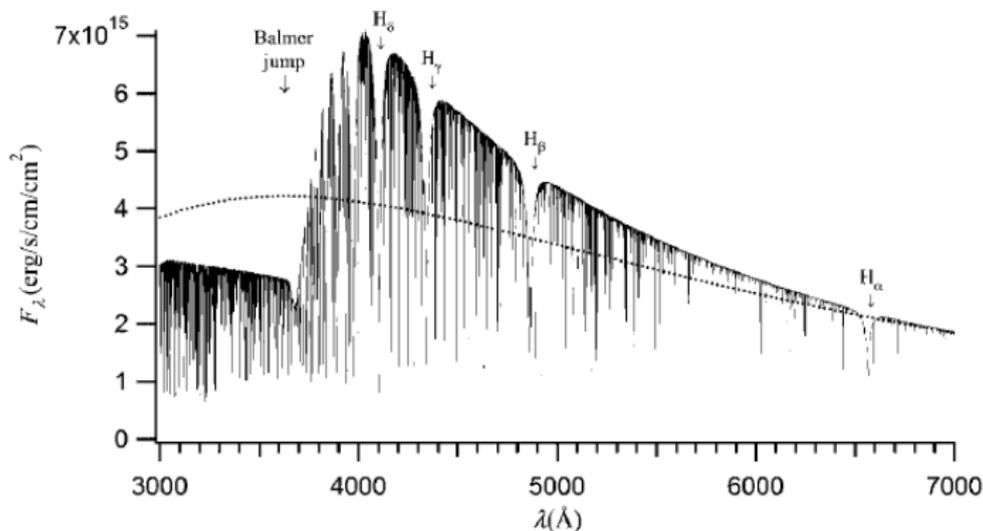
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 2.1- Líneas espectrales

- Integrando desde infinito hacia el centro estelar, la región de donde emerge la radiación estelar corresponde a una profundidad óptica  $\tau_\lambda = 1$ , lo cual define una superficie estelar llamada fotosfera (y que depende de  $\lambda$ ).
- El espectro observable de una estrella, es decir el espectro fotosférico, desvía notablemente del de un cuerpo negro, y es función de las opacidades de las especies presentes en su superficie.
- Ejemplo para una estrella con  $T_{\text{eff}} = 8000 \text{ K}$ :



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

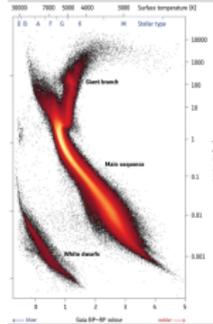
## 2.1- Líneas espectrales

- En primera aproximación, la intensidad emergente de la fotosfera corresponderá a radios más grandes, con temperaturas menores, si  $\tau_\lambda$  es mayor.
- Esperamos entonces que, en general, las líneas espectrales estelares correspondan a líneas de absorción.
- Para una profundidad  $L$ ,

$$\tau_\lambda \sim Ln\sigma_{\lambda_0}\phi_\lambda, \quad (5)$$

donde  $\phi_\lambda$  es el perfil (normalizado) de una línea con sección eficaz  $\sigma_{\lambda_0}$  causada por la transición en  $\lambda_0$  de una especie con densidad de número  $n$ .

- En LTE, la abundancia de una especie está determinada por el equilibrio químico de las reacciones conducentes a su formación.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales  
Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional  
Teorema del Virial  
Condiciones de colapso  
Contracción protoestelar

## 2.1- Líneas espectrales

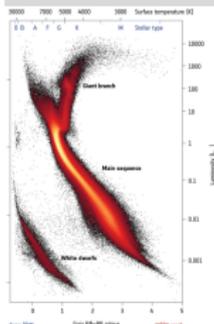
- Una reacción genérica entre especies  $\{X_a\}$  se puede escribir en función de los coeficientes estequiométricos  $\{\nu_a\}$ ,

$$\sum_{a=1}^A \nu_a X^a = 0, \quad (6)$$

donde  $A$  es el número total de especies en una reacción. Los coeficientes  $\nu_a$  de productos y reactantes tienen signo opuesto.

- A constante  $T$  y  $P$ , obtenemos las condiciones de equilibrio minimizando el potencial de Gibbs,  $G = E - TS + PV = \sum_a \mu_a n_a$  (por unidad de volumen en este caso), donde los  $\mu_a$  son los potenciales químicos de las especies  $X_a$ .
- Se llega a la Ley de Masa-Acción:

$$\sum_{a=1}^A \mu_a \nu_a = 0. \quad (7)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

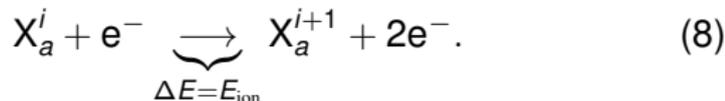
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

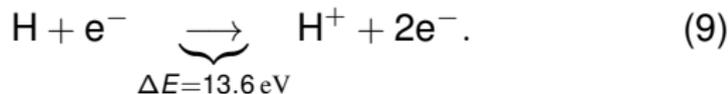
Contracción protoestelar

## 2.1- Líneas espectrales

- Para ionización colisional con electrones de un ion  $X_a^i$ ,



- Por ejemplo, para la ionización colisional de hidrógeno,

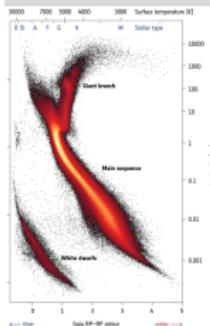


- Cómo el potencial químico de un gas ideal es proporcional a su concentración  $n$ , la Ley de Masa-Acción (Ec. 7) conduce a la 'Ecuación de Saha':

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{2}{n_e} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{Z_{i+1}}{Z_i} e^{-\frac{E_{\text{ion}}}{kT}}, \quad (10)$$

donde  $n_e$  es la densidad de electrones y los  $Z_i$  son las funciones particiones de cada especie,

$$Z_i = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\frac{E_n}{kT}} \quad (11)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

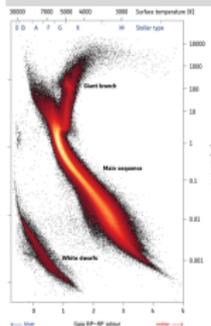
Contracción protoestelar

## 2.1- Líneas espectrales

- Vemos entonces que la fracción de ionización de una especie,  $n_{i+1}/(n_i + n_{i+1})$ , aumenta con la temperatura.
- Por otro lado para generar una línea proveniente desde un nivel  $n$ , es necesario poblar ese nivel mediante colisiones con  $e^-$ . Según la estadística de Boltzmann:

$$\frac{n(X_a \text{ en nivel } n)}{n(X_a)} = g_n \frac{e^{-\frac{E_n}{kT}}}{Z_a}. \quad (12)$$

- Vemos que para generar una línea de hidrógeno en la parte visible del espectro, es decir una línea de Balmer que parte de  $n = 2$ , hay que lograr excitar el nivel  $n = 2$  mediante colisiones, pero a la vez evitar ionizar completamente el hidrógeno.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

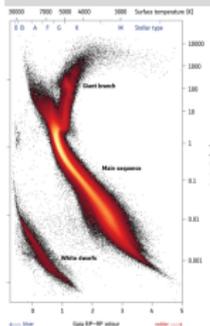
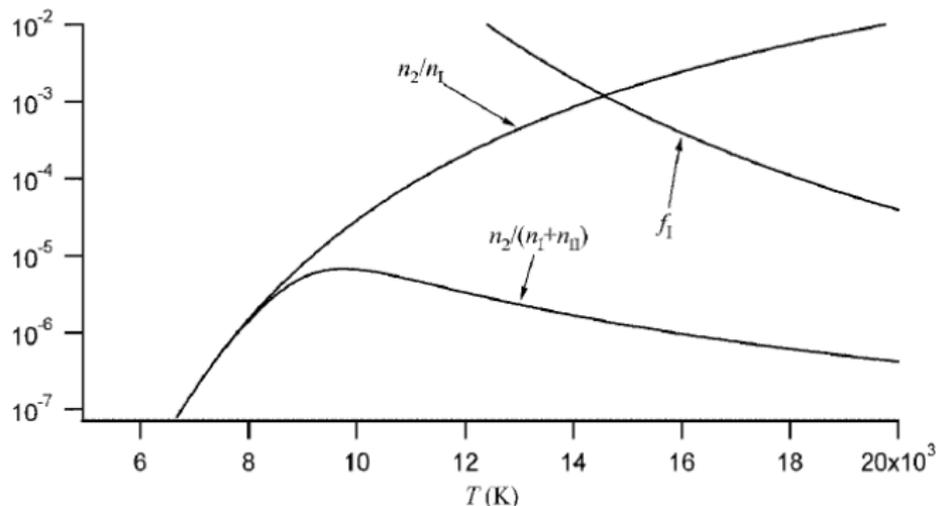
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 2.1- Líneas espectrales

- En resumen, las líneas de Balmer serán más pronunciadas en temperaturas de  $\sim 10^4$ K. La siguiente figura ilustra la competición entre la fracción de ionización de hidrógeno  $f_I = n_I/(n_I + n_{II})$  y la fracción de hidrógeno en el nivel  $n = 2$ ,  $n_2/n_I$ , en la abundancia de hidrógeno neutro en el nivel  $n = 2$ ,  $n_2/(n_I + n_{II})$ . (figura reproducida de Leblanc):



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

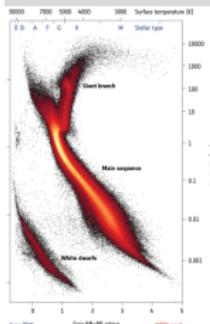
Contracción protoestelar

## 2.1- Líneas espectrales

- El análisis espectral permite entonces estimar la composición de las estrellas.
- Se suele comparar las abundancias de las especies en las fotosferas con la composición solar:

Element	$N_{\text{elem}}/N_{\text{tot}}$
H	$9.097 \times 10^{-1}$
He	$8.890 \times 10^{-2}$
O	$7.742 \times 10^{-4}$
C	$3.303 \times 10^{-4}$
Ne	$1.119 \times 10^{-4}$
N	$1.021 \times 10^{-4}$
Mg	$3.458 \times 10^{-5}$
Si	$3.228 \times 10^{-5}$
Fe	$3.154 \times 10^{-5}$
S	$1.475 \times 10^{-5}$

Abundancias solares, tabla resumen reproducida de Leblanc



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

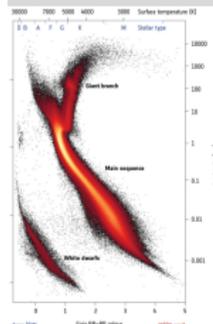
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 2.1- Líneas espectrales

- Los elementos mas pesado que He se llaman ‘metales’.
- Si  $X$  es la fracción de masa en H,  $Y$  la masa en He, y  $Z$  la masa en metales, tenemos  $X + Y + Z = 1$ .
- Para el Sol  $X = 0.7346$ ,  $Y = 0.2485$ ,  $Z = 0.0169$ .



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

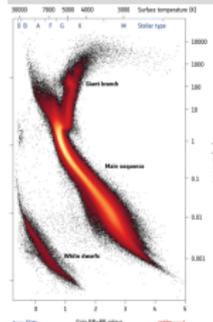
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

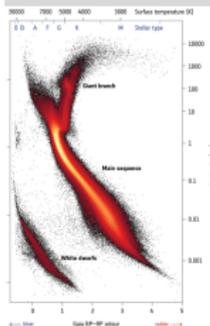
Contracción protoestelar

## 2.2- Tipos espectrales

- Las estrellas se clasifican según la fuerza de ciertas líneas en sus espectros, y esta clasificación se ordena según la temperatura efectiva correspondiente.

Spectral class	$T_{\text{eff}}$	Spectral characteristics	Colour	Example
O	>30000 K	HeII strong, H faint, multiply-ionised metals strong	blue	$\lambda$ Ori
B	10000–30000 K	HeI strong, H moderate	blue-white	Rigel
A	7500–10000 K	H lines at their maximum	white	Vega
F	6000–7500 K	Singly ionised metals strong, H moderate	white-yellow	Procyon
G	5000–6000 K	Singly ionised metals strong, H faint	yellow	Sun
K	3500–5000 K	Strong neutral and Singly ionised metals, H faint	orange	Arcturus
M	<3500 K	Strong molecule bands (i.e. TiO), strong neutral metals, H very faint	red	Betelgeuse

(Tabla resumen reproducida de Leblanc)



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

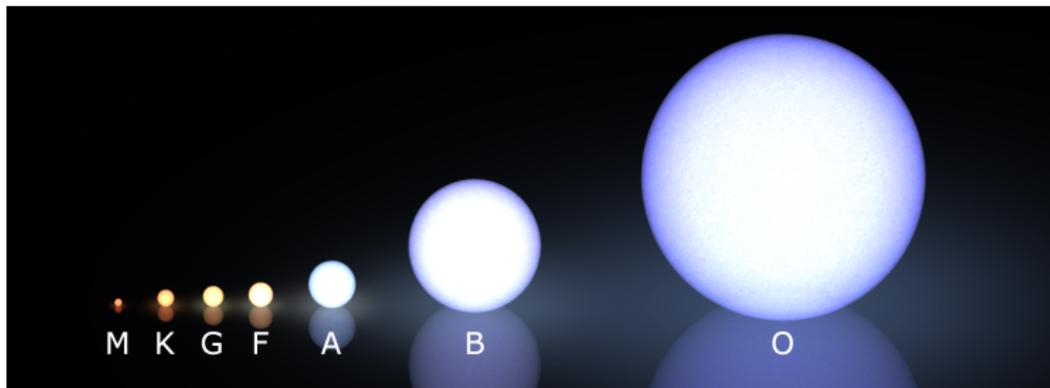
Contracción gravitacional

Teorema del Virial

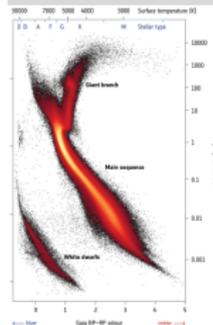
Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 2.2- Tipos espectrales



(Wikipedia)



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

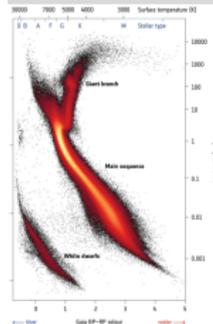
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 2.2- Tipos espectrales

- Cada clase espectral se divide en  $\sim 10$  sub-clases, también ordenadas según  $T_{\text{eff}}$ .
- El Sol tiene tipo espectral G2.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

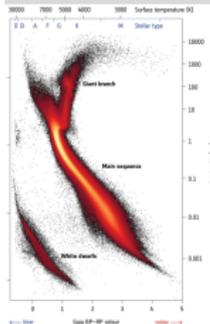
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

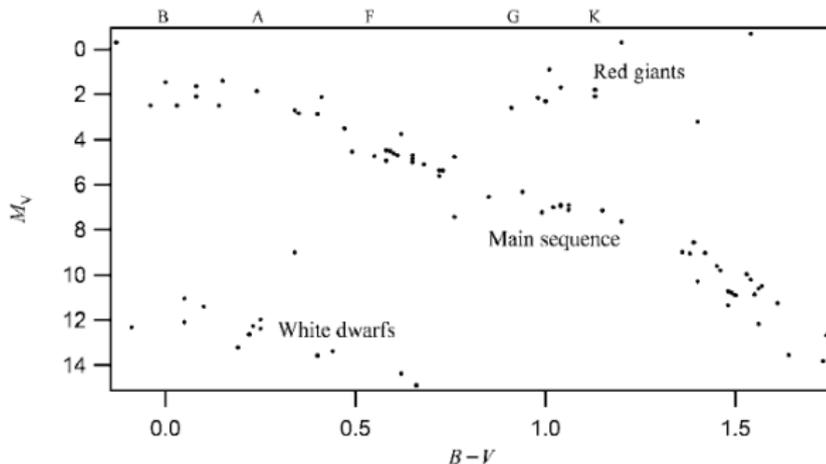
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

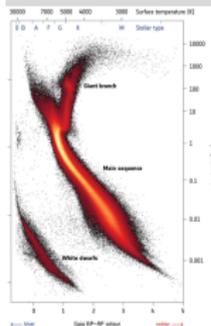
## 2.3- Diagrama de Hertzsprung-Russell

- Los colores y luminosidades de las estrellas son sorprendentemente ordenados, en especial cuando se grafican en un diagrama de ‘Hertzsprung-Russell’, o diagrama H-R.



(Figura reproducida de Leblanc)

- Históricamente el diagrama H-R reporta magnitud absoluta  $M_V$  en el eje  $y$ , y la diferencia de magnitudes aparentes  $B - V$  en  $x$ . Las diferencias de magnitudes también se llama ‘color’  $B - V$ .



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

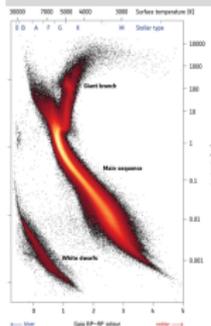
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 2.3- Diagrama de Hertzsprung-Russell

- Para un cuerpo negro, el color  $m_1 - m_2$ , o bien la razón de densidades de flujos  $F_1/F_2$ , es una función monótona de  $T_{\text{eff}}$ .
- A sus vez, para una  $T_{\text{eff}}$ ,  $M_V$  es una función de la luminosidad bolométrica. Esto conduce a otras versiones del diagrama H-R.
- En el diagrama H-R las regiones donde se agrupan las estrellas se llaman ‘clases de luminosidad’.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

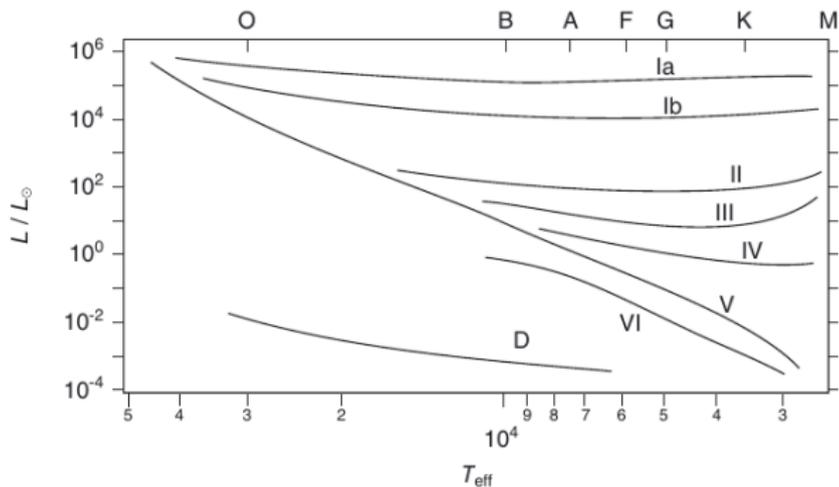
Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

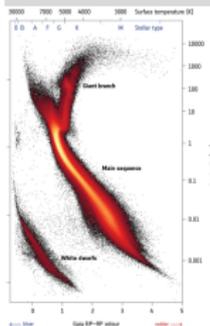
Contracción protoestelar

## 2.3- Diagrama de Hertzsprung-Russell



Ia	Bright supergiants
Ib	Supergiants
II	Bright giants
III	Giants
IV	Subgiants
V	Main-sequence stars (or dwarfs)
VI (or sd)	Subdwarfs
D (or VII)	White dwarfs

(reproducido de Leblanc)



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

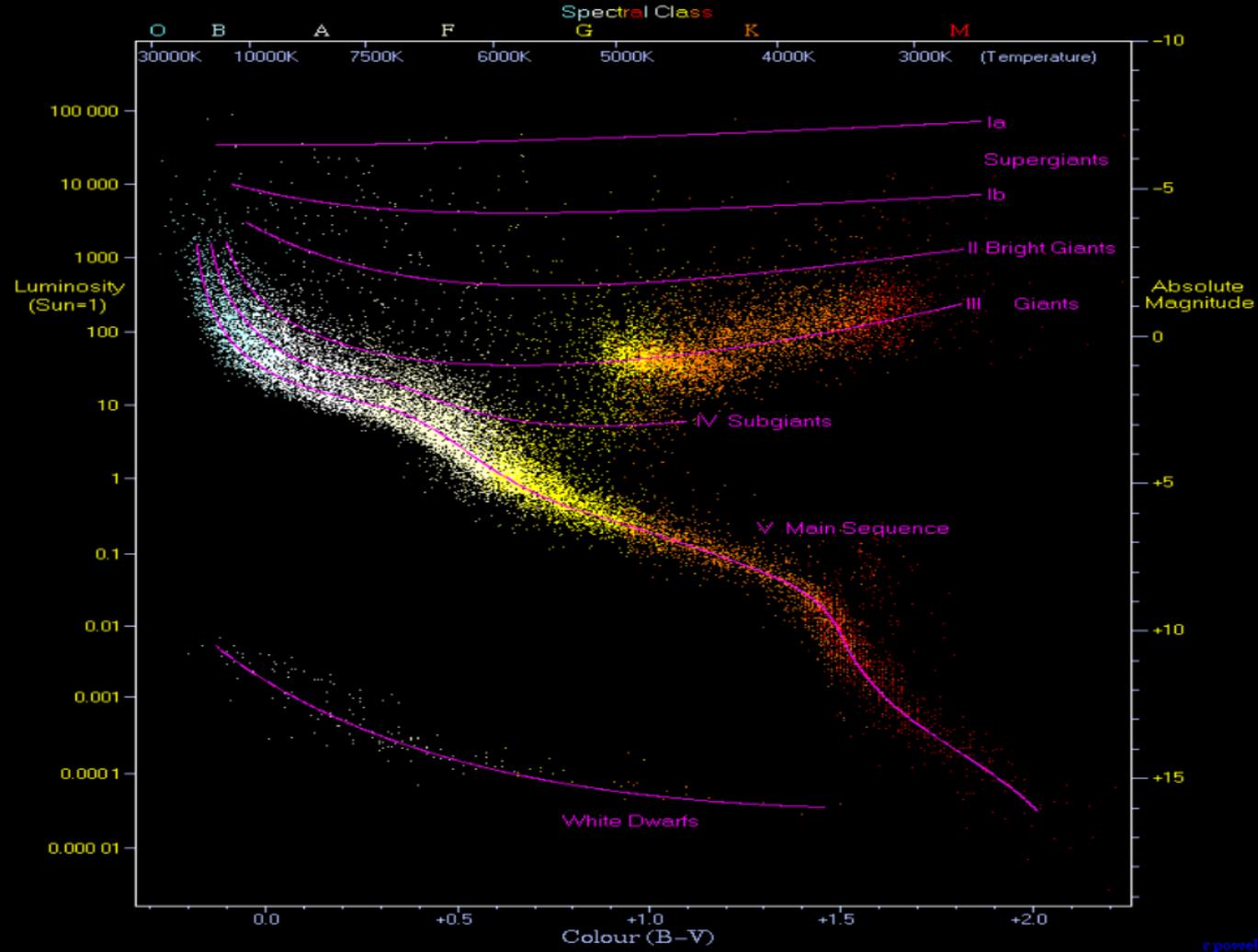
Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

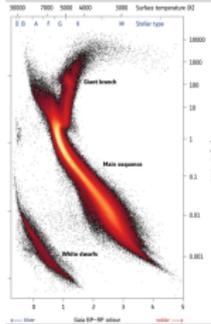
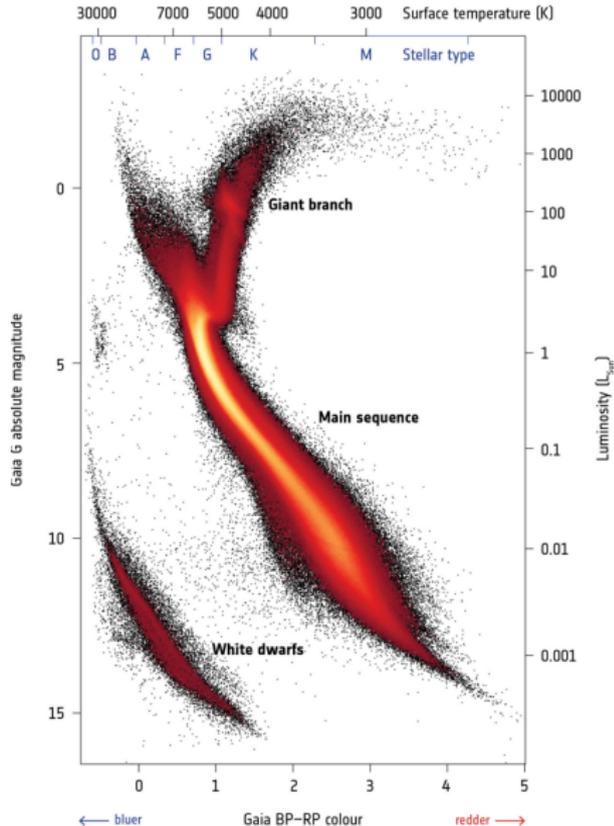
Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



## 2.3- Diagrama de Hertzsprung-Russell

Diagrama H-R de la misión espacial *Gaia*:



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

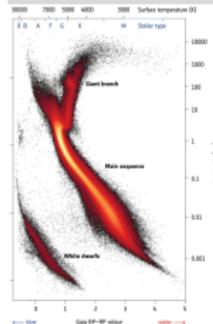
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

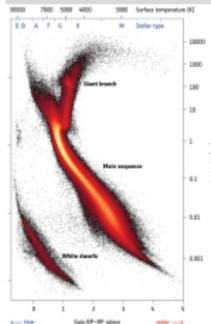
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

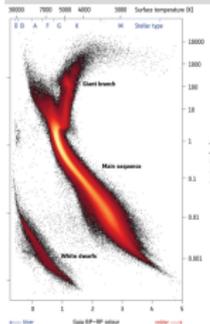
Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.1- Contracción gravitacional

- El agente motor que conduce a la formación y a la evolución estelar es la contracción gravitacional de la sopa primordial que resulta del Big Bang (o sea 75% de H, y 25% de He, por masa).
- Se pueden sacar conclusiones generales sobre la contracción gravitacional considerando una esfera auto-gravitante con simetría esférica, y con densidad de masa  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ .
- La masa encerrada dentro de una esfera de radio  $r$  es

$$m(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'. \quad (13)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.1- Contracción gravitacional

- La masa de un elto de volumen  $dV$  es  $dm = \rho dV$ .
- Si aproximamos el gas primordial como un fluido, la ecuación de movimiento del elto de volumen  $dV$  es

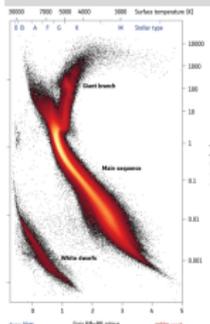
$$dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} P dV + d\vec{f}, \quad (14)$$

donde  $d\vec{f}$  es la fuerza externa aplicada a  $dV$ .

- En coordenadas esféricas, y en componente  $\hat{r}$ , para el caso de una esfera auto-gravitante tenemos

$$dm \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial P}{\partial r} dV + dm g(r), \quad (15)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + g(r). \quad (16)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

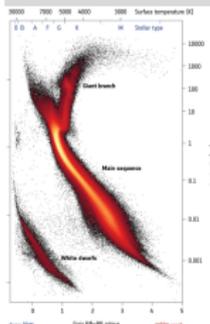
Contracción protoestelar

## 3.1- Contracción gravitacional

- Vemos de Ec. 16 que para un equilibrio estático es necesario que  $P$  aumente hacia  $r \rightarrow 0$ .
- ¿Qué pasaría en ausencia de presión?
- Consideramos un elto de volumen  $dV$ , inicialmente en reposo en  $r_o$ , bajo la influencia gravitacional de  $\vec{g}(r_o) = -\frac{Gm(r_o)}{r_o^2} \hat{r}$ .
- Si la masa encerrada en radios inferiores al del elto de  $dV$  no cambia (hipotesis por confirmar *a-posteriori*), entonces por conservación de energía,

$$\frac{1}{2}\rho dV \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = \frac{G\rho dVm_o}{r} - \frac{G\rho dVm_o}{r_o}, \quad (17)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2Gm_o}{r} - \frac{2Gm_o}{r_o}}. \quad (18)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

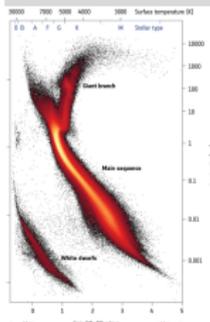
## 3.1- Contracción gravitacional

- El tiempo de caída libre (“free-fall”) hasta el origen es

$$\begin{aligned}t_{\text{ff}} &= \int_{r_o}^0 \frac{dt}{dr} dr, \\&= \int_{r_o}^0 \left( \frac{2Gm_o}{r} - \frac{2Gm_o}{r_o} \right)^{-1/2} dr, \\&= \left( \frac{r_o^3}{2Gm_o} \right)^{1/2} \underbrace{\int_0^1 \left( \frac{x}{1-x} \right)^{1/2} dx}_{\pi/2}\end{aligned}$$

- Es interesante notar que  $t_{\text{ff}}$  solo depende de la densidad media encerrada por  $r_o$ ,

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}. \quad (19)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

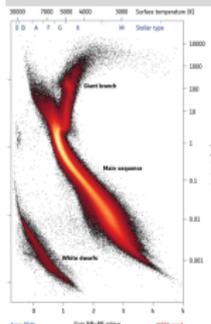
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.1- Contracción gravitacional

- De Ec. 19, vemos que para un medio con densidad homogénea el tiempo de caída no depende de  $r_o$ , y por lo tanto no se alcanzan los eltos de volumen hasta llegar al origen.
- En la práctica la energía gravitacional usualmente termina por disiparse en energía termal, y radiativa, pero si esta energía radiativa puede escapar, es decir para un medio termalmente delgado, entonces  $t_{ff}$  es una buena aproximación de colapso gravitacional.
- Un ejemplo de medio ópticamente delgado sería una nube de hidrógeno puro, sea molecular o atómico.
- Una vez que el hidrógeno se ioniza, la nube se hace opaca y se frena la caída ya que aumenta la presión porque no se puede escapar fácilmente la radiación.
- Llegamos entonces a una situación de equilibrio.



[Temperatura efectiva y magnitud](#)

[Clasificación espectral](#)

[Líneas espectrales](#)

[Tipos espectrales](#)

[Diagrama de](#)

[Hertzsprung-Russell](#)

[Formación Estelar](#)

[Contracción gravitacional](#)

[Teorema del Virial](#)

[Condiciones de colapso](#)

[Contracción protoestelar](#)

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

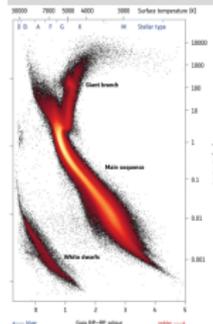
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.2- Teorema del Virial

- En equilibrio, de Ec. 16 tenemos la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (20)$$

- Consideramos una esfera de radio  $R$  y masa  $M$ , e integramos  $\int_0^R 4\pi r^3$  (Ec. 20)  $dr$  para obtener una primera versión del teorema del virial:

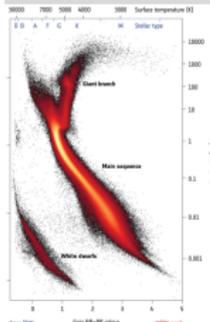
$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_G}{V}, \quad (21)$$

con

$$E_G = -\int_{m=0}^{m=M} \frac{Gm(r)}{r} dm, \quad (22)$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{V} \int_0^R P 4\pi r^2 dr, \quad (23)$$

y la condición de borde  $P(R) = 0$ .



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.2- Teorema del Virial

- Para relacionar  $\langle P \rangle$  con la energía interna (es decir la energía cinética microscópica), usamos que en general:

$$P = \frac{n}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle, \quad (24)$$

con  $n$  densidad de número. Este resultado se puede ver considerando que  $N/2$  partículas en un recipiente cúbico viaja hacia  $+\hat{z}$ , de manera que la fuerza impartida en la tapa superior con superficie  $\Delta A$  es

$$P\Delta A = \Delta A \frac{n}{2} 2 \langle p_z v_z \rangle,$$

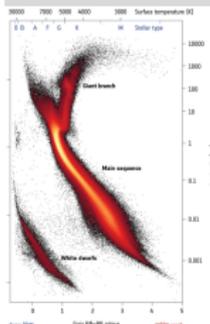
y  $P = n \langle p_z v_z \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle$  por isotropía.

- Por ejemplo, para el gas ideal no-relativista,  $\vec{p} \cdot \vec{v} = mv^2$ , y  $P = \frac{2}{3} n \langle \frac{1}{2} mv^2 \rangle = \frac{2}{3} n \frac{3}{2} kT = nkT$ , y también

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_K}{V}, \quad (25)$$

donde  $E_K$  es la energía interna.

- En cambio, para un gas de fotones (cuerpo negro),  $\vec{p} \cdot \vec{v} = pc$  y  $P = \frac{1}{3} n \langle pc \rangle$ .



[Temperatura efectiva y magnitud](#)

[Clasificación espectral](#)

[Líneas espectrales](#)

[Tipos espectrales](#)

[Diagrama de](#)

[Hertzsprung-Russell](#)

[Formación Estelar](#)

[Contracción gravitacional](#)

[Teorema del Virial](#)

[Condiciones de colapso](#)

[Contracción protoestelar](#)

## 3.2- Teorema del Virial

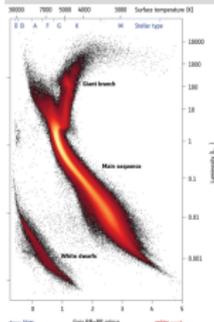
- En el caso no-relativista, de Ec. 25 el virial se escribe

$$2E_K + E_G = 0, \quad (26)$$

o bien

$$E_T \equiv E_K + E_G = -E_K = \frac{1}{2}E_G. \quad (27)$$

- Vemos que a masa constante, mientras más compacta la esfera, más caliente.
- Típicamente, para una esfera  $E_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$ , y si hay contracción,  $\Delta R < 0$ , entonces  $\Delta E_G < 0$ , y para mantener equilibrio hay que aumentar  $\Delta E_K = -\frac{1}{2}\Delta E_G$ , pero el resto debe disiparse en radiación por la superficie de manera que  $\Delta E_T = \frac{1}{2}\Delta E_G$ .
- A su vez, para mantener  $R$  constante en presencia de radiación, es necesario otra fuente de energía que la provista por el  $\Delta E_G$  de la contracción, como fusión nuclear. Pero si la fusión nuclear provee más energía que la justa y necesaria, la estrella se expande.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

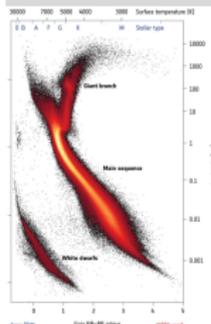
Contracción protoestelar

## 3.2- Teorema del Virial- Caso relativista

- Es interesante notar que en el caso relativista,  $P = \frac{1}{3}n\langle pc \rangle = \frac{1}{3}\frac{E_K}{V}$ . Usando el virial (Ec. 21),

$$E_T = E_K + E_G = 0. \quad (28)$$

- Vemos que en el caso relativista, solo es posible eq. hidrostático si la energía total es justo 0, al límite del sistema ligado  $\Rightarrow$  el equilibrio es inestable.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.2- Teorema del Virial- Grados internos de libertad

- Cuando hay grados internos de libertad usamos el índice adiabático  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ . Si no hay intercambios de calor,

$$dE_K = -PdV, \quad (29)$$

pero de  $PV^\gamma = \text{Cte}$ ,  $d(PV) = -(\gamma - 1)PdV$ , y

$$dE_K = \frac{1}{\gamma - 1}d(PV), \quad (30)$$

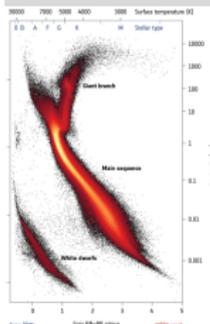
de manera que

$$E_K = \frac{PV}{\gamma - 1}. \quad (31)$$

- Usamos el virial (Ec. 21) para extender el teorema del virial al caso de grados internos de libertad,

$$3(\gamma - 1)E_K + E_G = 0. \quad (32)$$

- Para el gas ideal monatómico,  $\gamma = 5/3$ , mientras que para el gas ultra-relativista,  $\gamma = 4/3$ .
- La estrella es ligada solo si  $\gamma > 4/3$ .



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.2- Teorema del Virial

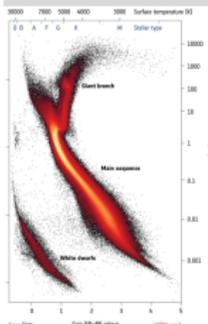
- Ejemplo: el Sol. Con un radio  $R_{\odot} = 7 \times 10^8$  m y  $M_{\odot} = 1.98 \times 10^{30}$  kg, la densidad promedio del Sol es  $\langle \rho \rangle = 1.4 \cdot 10^3$  kg m<sup>-3</sup>. Por lo tanto  $\tau_{\text{ff}} = \frac{1}{2}$  h.
- Claramente el Sol está en equilibrio hidrostático. El virial da

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_G}{V} \sim \frac{GM_{\odot}^2}{4\pi R_{\odot}^4} \sim 10^{14} \text{ Pa.} \quad (33)$$

- Usando el gas ideal,

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{m}} k T_I, \quad (34)$$

y con  $\bar{m} = 0.5m_H$ ,  $T_I \sim 6 \times 10^6$  K.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

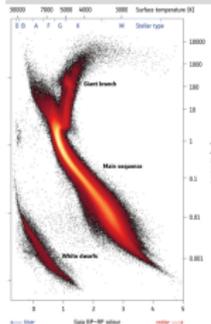
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

### 3.3- Condiciones de colapso

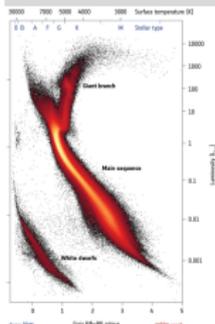
- Para una esfera,  $E_G = -f \frac{GM^2}{R}$ , donde  $f \sim 1$  y  $f = \frac{5}{3}$  para densidad homogénea, y  $E_K = \frac{3}{2} NkT$ , donde  $N$  es el número total de partículas en la esfera.
- La condición para una esfera ligada es  $E_T < 0$ , o sea  $E_K < |E_G|$ . El virial impone una condición de colapso más estricta:  $2E_K < |E_G|$ .
- Entonces una nube esférica colapsará si su masa excede la *masa de Jeans*,

$$M_J = \frac{v}{f} \frac{3kT}{2G\bar{m}} R, \quad (35)$$

donde  $v = 2$  para la condición del virial,  $v = 1$  para la esfera ligada,  $\bar{m} = \mu m_H$  es la masa promedio de las especies que componen la nube (para una nube molecular,  $\mu \approx 2.3$ ).

- Alternativamente, se puede escribir la condición de colapso con una densidad mínima,

$$\rho_J = \frac{v}{f} \frac{3}{4\pi M^2} \left( \frac{3kT}{2G\bar{m}} \right)^3. \quad (36)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

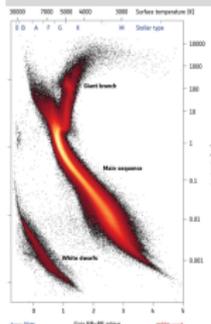
Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

### 3.3- Condiciones de colapso



- Por ejemplo, para el Saco de Carbón,  $M \sim 10^3 M_{\odot}$ ,  $T \sim 20 K$ , y  $\rho_J \sim 10^{-22} \text{ kg m}^{-3}$ , o sea  $n_{\text{H}_2} = 10^5 \text{ m}^{-3}$ , correspondiente a lo observado en las regiones mas difusas de la nube.
- Sin embargo, para formar una estrella con  $M \sim 1 M_{\odot}$ , de Ec. 36 vemos que se necesita una densidad  $10^6$  veces mas alta.
- ¿Quizás el colapso ocurre primero en gran escala, y luego al subir  $\rho$  disminuye el radio de múltiples condensaciones?



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

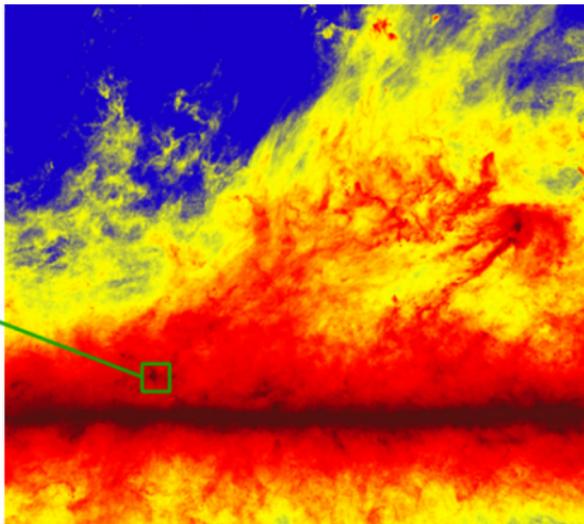
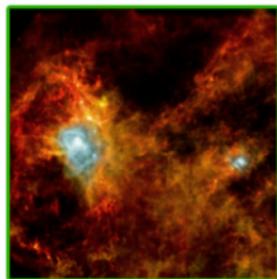
Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

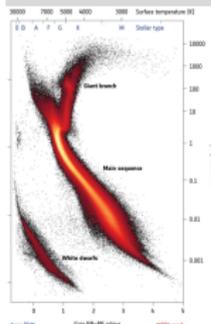
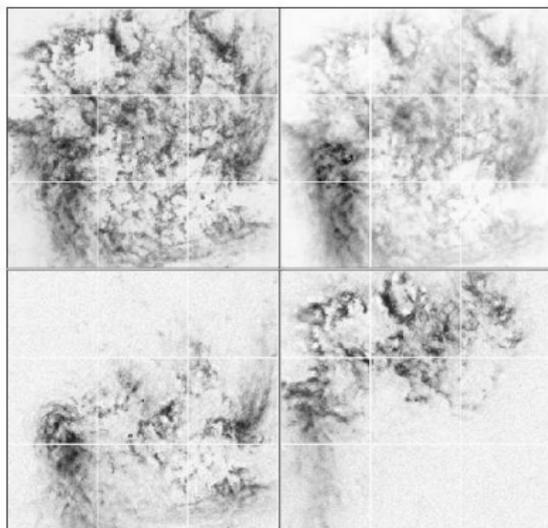
En la naturaleza el concepto de una esfera homogénea auto-gravitante no existe... Ejemplo de región de formación estelar: Aquila Rift



Izquierda: *Herschel*, derecha: *Planck*

### 3.3- Condiciones de colapso

- En realidad el ISM (*the interstellar medium*) es una fractal aleatoria, como lo muestra el análisis fractal de H I 21 cm en LMC (Elmegreen et al. 2001, ApJ, 548, 749).



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

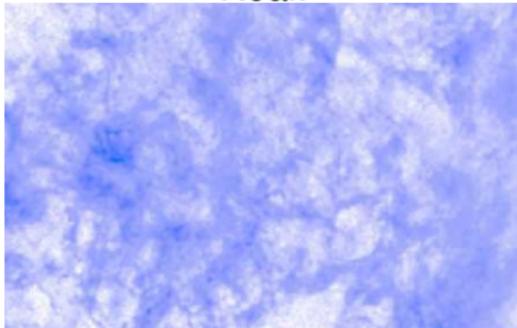
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

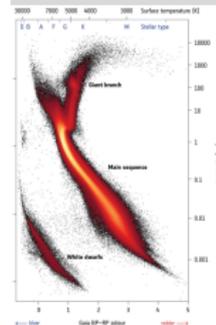
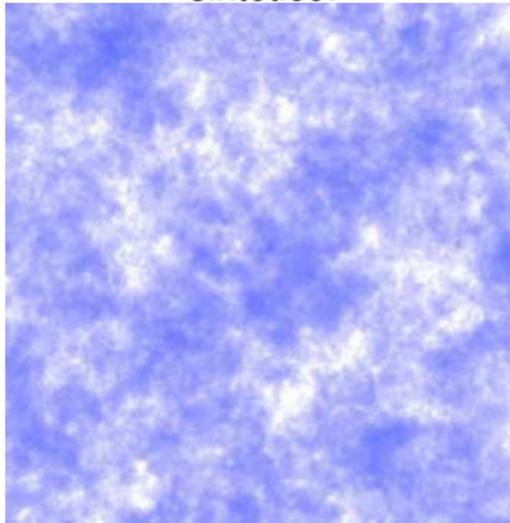
Contracción protoestelar

## 3.3- Condiciones de colapso

Real:



sintético:



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

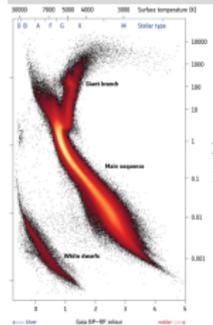
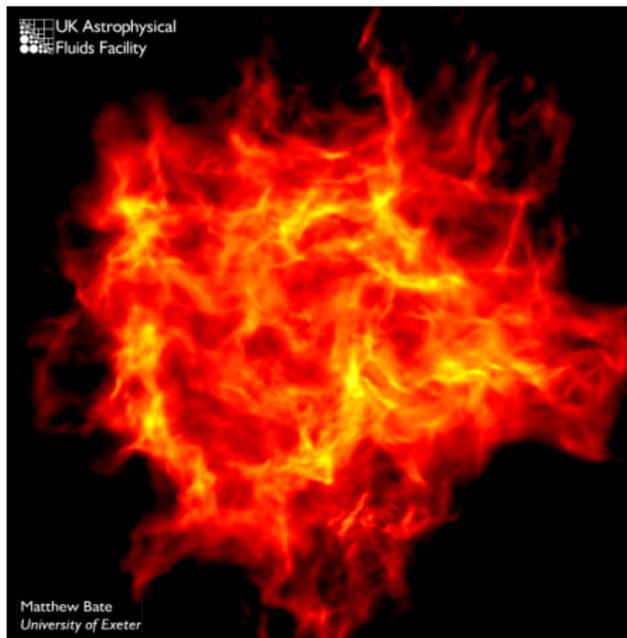
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

### 3.3- Condiciones de colapso

- Las simulaciones hidrodinámicas reproducen bien las propiedades generales de las regiones de formación estelar.
- Ver ejemplos en la página de [Matthew Bate](#)



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# Plan

## 1 Temperatura efectiva y magnitud

## 2 Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

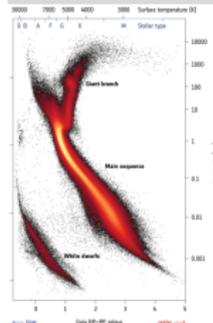
## 3 Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

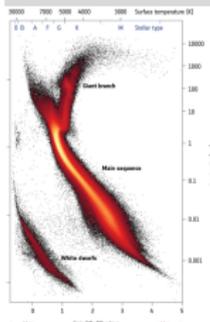
Contracción protoestelar

### 3.4- Contracción protoestelar

- Imaginemos que de alguna manera logramos la densidad crítica para condensar  $1 M_{\odot}$ , entonces  
 $\Rightarrow \rho_J = 10^{-16} \text{ kg m}^{-3}$ , y  $R = 10^{15} \text{ m}$ , o sea  $R \sim 0.1 \text{ pc}$  o  $\sim 7000 \text{ au}$ .
- Para frenar el colapso y llegar a equilibrio hidrostático, es necesario ionizar la nube a costa de la energía gravitacional inicial:

$$\frac{GM^2}{R_2} - \frac{GM^2}{R_1} \approx \underbrace{\frac{M}{2m_H} \overbrace{4.5 \text{ eV}}^{\epsilon_{\text{H}_2}}}_{\text{disociación de H}_2} + \underbrace{\frac{M}{m_H} \overbrace{13.6 \text{ eV}}^{\epsilon_{\text{H}}}}_{\text{ionización}} \equiv \Delta E_I \quad (37)$$

- Si  $M = 1 M_{\odot}$ ,  $\Delta E_I \sim 3 \times 10^{39} \text{ J}$ , y si  $R_1 \sim 0.1 \text{ pc}$  eso corresponde a  $R_2 \sim 10^{11} \text{ m}$ , o sea  $R_2 \sim 1 \text{ au}$  o  $R_2 \sim 100 R_{\odot}$ .
- Este colapso inicial sucedería en el tiempo  $t_{\text{ff}}$  correspondiente a  $\rho_J = 10^{-16} \text{ kg m}^{-3}$ , o sea  $t_{\text{ff}} \sim 20\,000 \text{ yr}$ .



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

### 3.4- Contracción protoestelar

- Al momento de establecer equilibrio hidrostático, tenemos

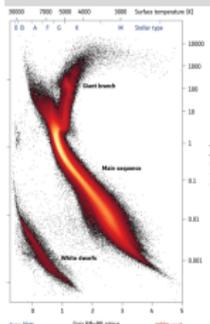
$$E_G \approx -\frac{GM^2}{R_2} \sim -\Delta E_I. \quad (38)$$

- Además,  $E_K = \frac{3}{2} N_p T + \frac{3}{2} N_e T = \frac{M}{m_H} 3kT$ .
- Con el teorema del virial,  $2E_K + E_G = 0$ , o sea  $2\frac{M}{m_H} 3kT - \left(\frac{M}{2m_H} \epsilon_{H_2} + \frac{M}{m_H} \epsilon_H\right) = 0$ , y

$$kT \sim \frac{1}{12} (\epsilon_{H_2} + 2\epsilon_H) \sim 2.6 \text{ eV}, \quad (39)$$

y  $T \sim 30000 \text{ K}$ .

- Esta temperatura media es independiente de la masa de la protoestrella, y calza con la Ec. de Saha para ionizar colisionalmente H I.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

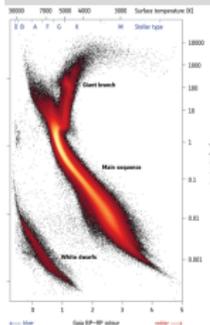
## 3.4- Contracción protoestelar

- La contracción ulterior, para pasar de un radio proto-estelar de  $R_{\star} \sim 100 R_{\odot}$  a  $1 R_{\odot}$ , sucede en la escala de tiempo de Kelvin-Helmholtz  $\tau_{\text{KH}}$ . Las pérdidas radiativas por la superficie son el único sumidero de energía:

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{dE_G}{dt} \approx \frac{E_G}{\tau_{\text{KH}}} = -4\pi R_{\star}^2 \sigma T^4, \quad (40)$$

o sea

$$\tau_{\text{KH}} \sim -\frac{E_G}{4\pi R_{\star}^2 \sigma T^4} \sim 10^7 \text{ yr} \quad (41)$$



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

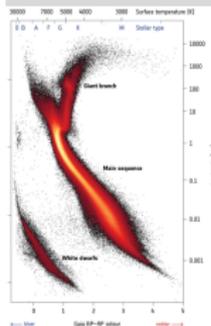
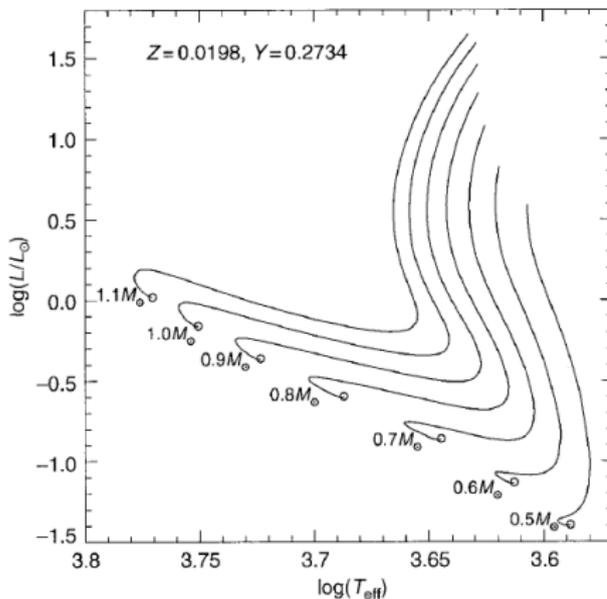
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.4- Contracción protoestelar

- Contracción protoestelar: Hayashi tracks.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

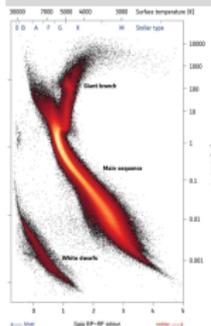
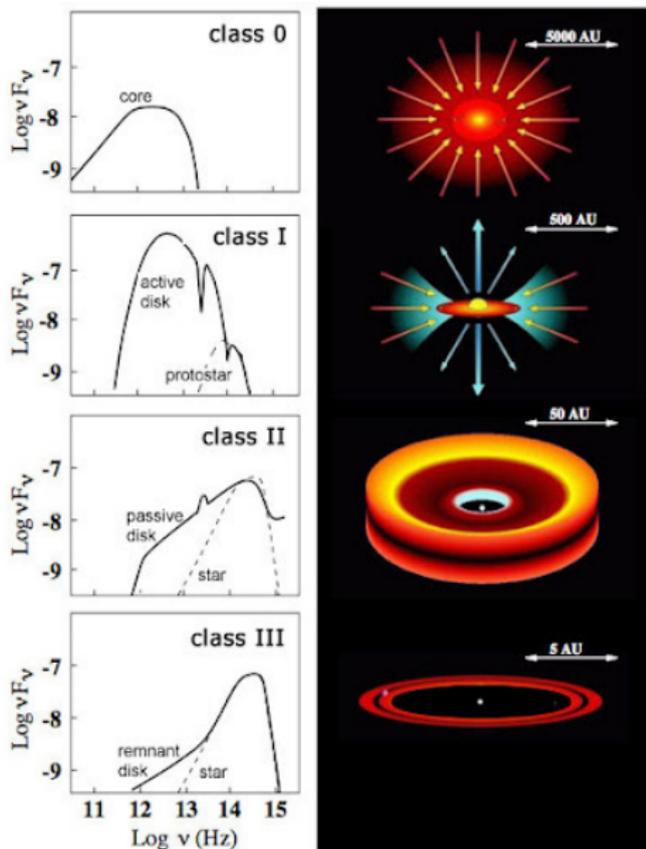
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.4- Contracción protoestelar

En la práctica el proceso de formación estelar ocurre a través de un disco circunestelar o “protoplanetario”



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales  
Tipos espectrales  
Diagrama de Hertzsprung-Russell

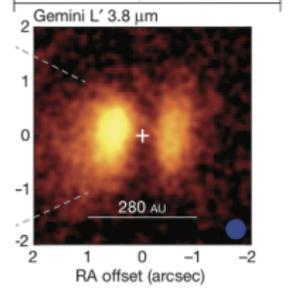
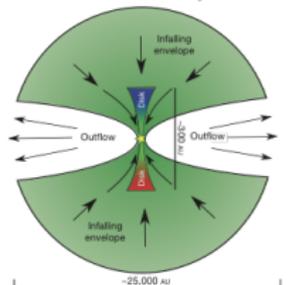
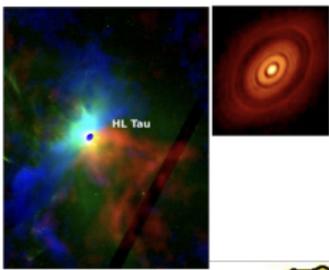
Formación Estelar

Contracción gravitacional  
Teorema del Virial  
Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

# 3.4- Contracción protoestelar

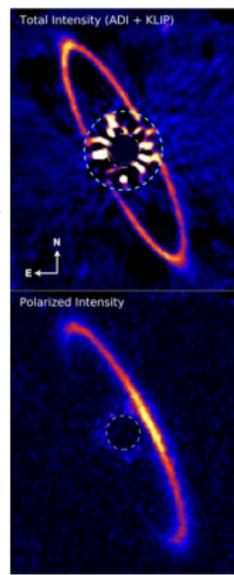
**I, HL Tau**  
(ALMA)



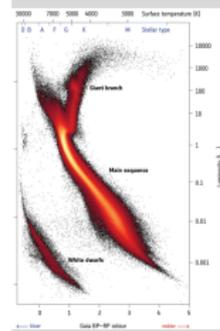
**0, L1527IRS** (Tobin+ 2012)



**II, HD 162396**  
(Rosenfeld+ 2013)



**III, debris,**  
HR4796A (GPI)



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

- Líneas espectrales
- Tipos espectrales
- Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

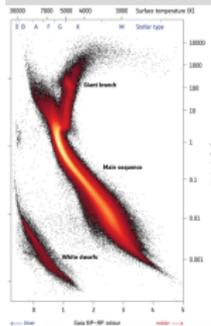
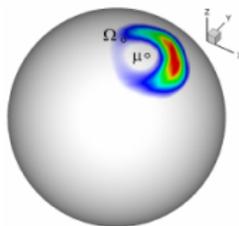
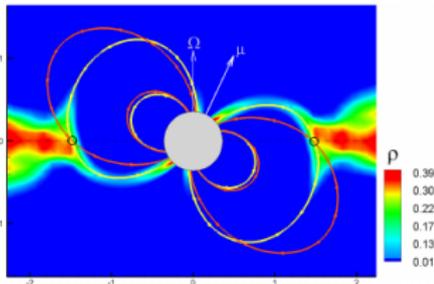
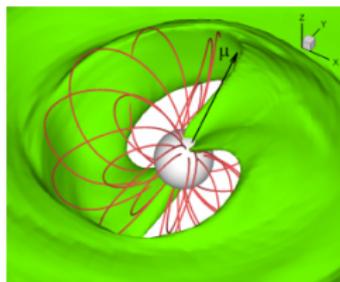
- Contracción gravitacional
- Teorema del Virial
- Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

### 3.4- Contracción protoestelar

Zoom en el proceso de acreción de masa sobre la estrella:  
“Magnetospheric accretion” (Romanova & Owocki 2016,

<https://arxiv.org/pdf/1605.04979.pdf>)



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

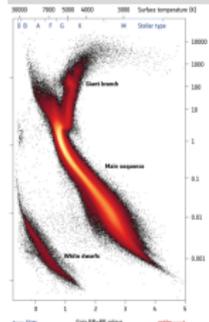
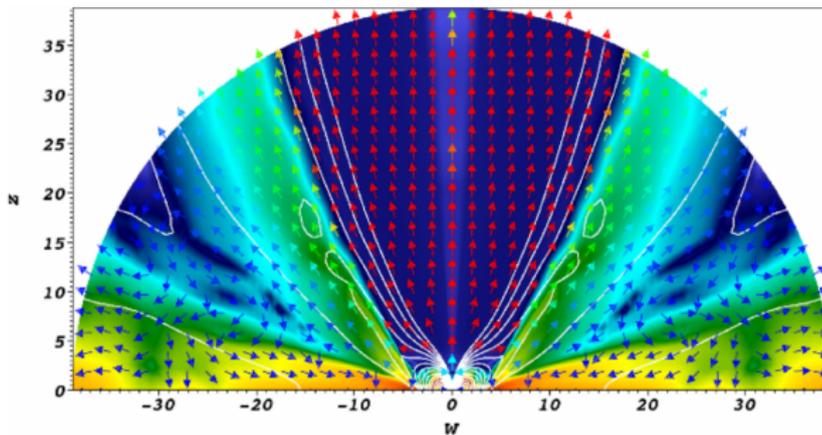
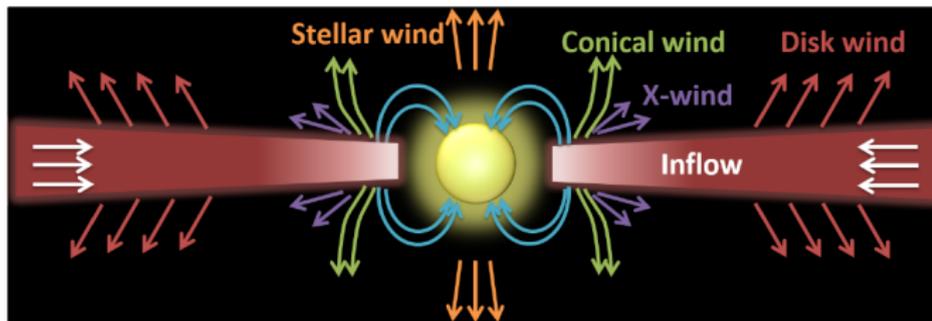
Contracción protoestelar



Versión artística:

### 3.4- Contracción protoestelar

- El mismo modelo de acreción también propone un mecanismo de aceleración del viento estelar.



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

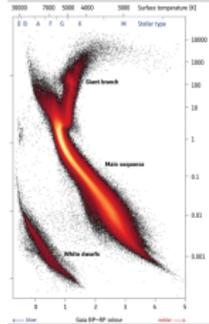
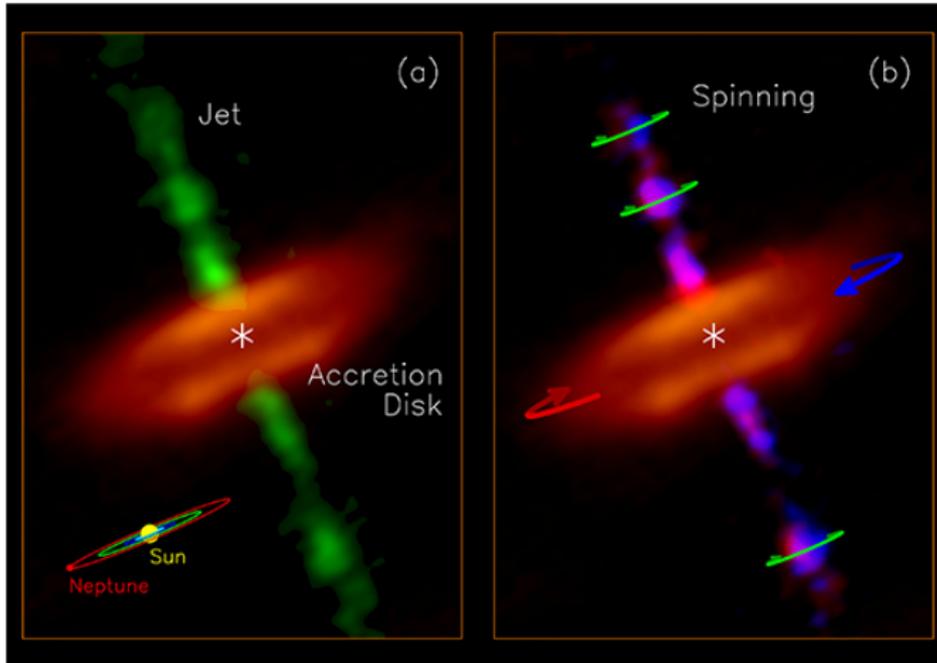
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

### 3.4- Contracción protoestelar

- Ejemplo: H 212 en Orion, SiO(8-7) [ALMA press release](#)



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

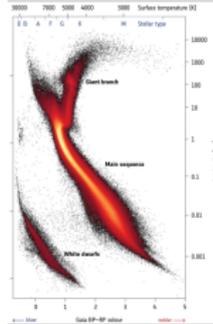
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.4- Contracción protoestelar

- Imagen IR del mismo jet (credit: ESO).



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

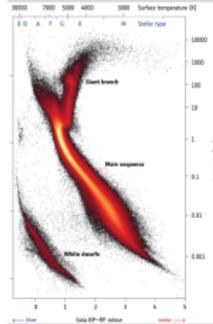
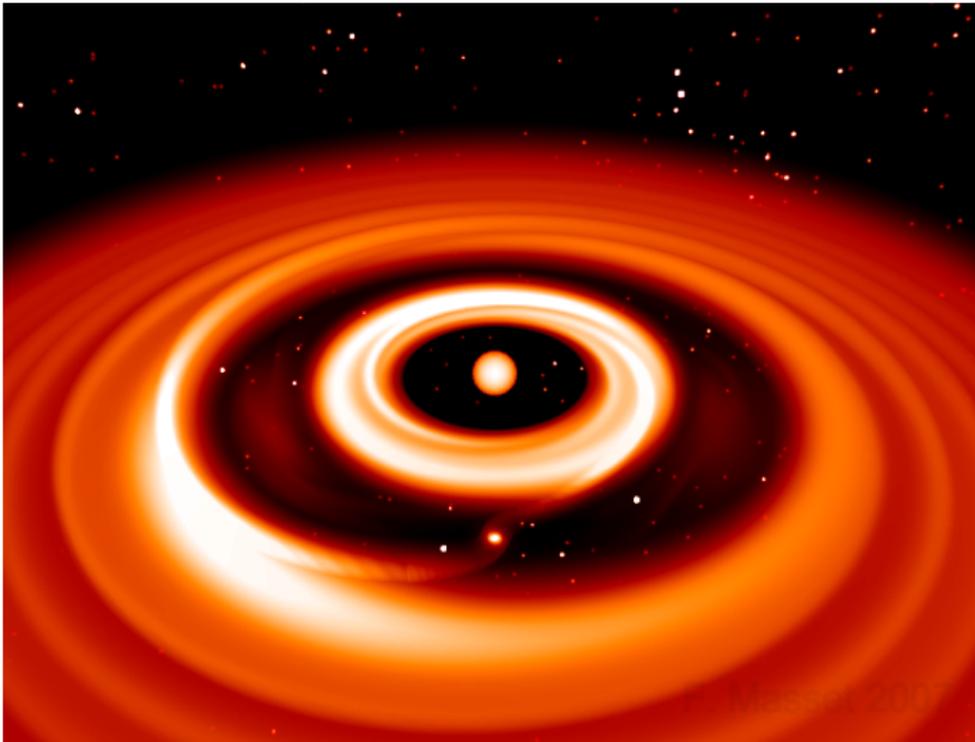
Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.4- Contracción protoestelar

- Zoom en el proceso de formación planetaria:



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

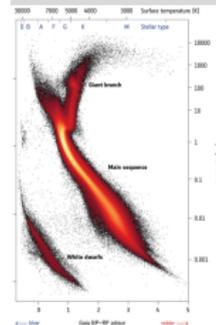
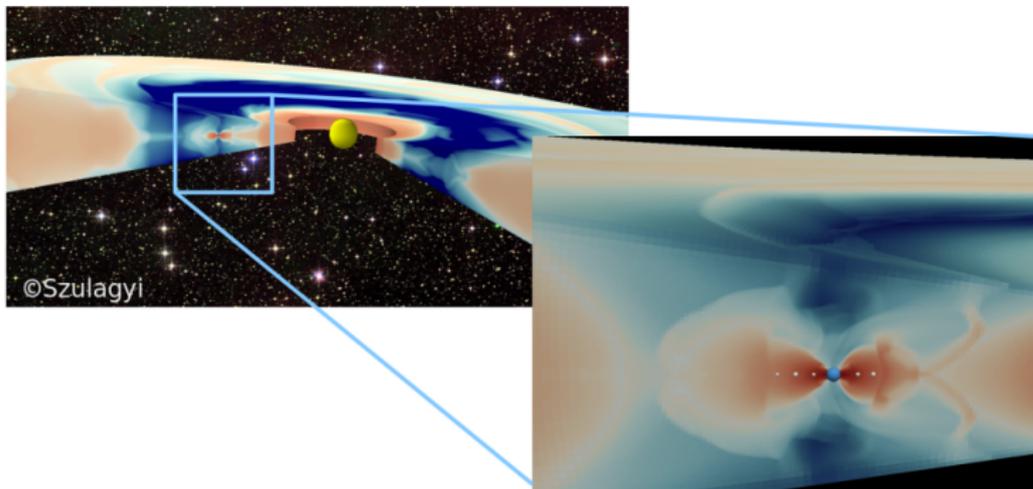
Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar

## 3.4- Contracción protoestelar



Temperatura efectiva y magnitud

Clasificación espectral

Líneas espectrales

Tipos espectrales

Diagrama de

Hertzsprung-Russell

Formación Estelar

Contracción gravitacional

Teorema del Virial

Condiciones de colapso

Contracción protoestelar