Resolución Auxiliar N°1 FI2A2

Prof. Auxiliar: Felipe L. Benavides

Fecha: Lunes 4 de Agosto, 2008.

I. Problemas

Problema 1

Dada la complejidad geométrica del problema, facilitaremos el cálculo con el ppio. de superposición, obteniendo el valor deseado como resta entre los valores de campo eléctrico para la cinta completamente cargada, y un disco, también totalmente cargado. Para éste último, consideraremos el resultado obtenido en el apunte y visto en cátedra, que determina que dicho campo eléctrico es

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\left[\frac{z}{\|z\|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

con R el radio del disco. Así, sólo necesitamos obtener el primer campo eléctrico y restar.

Por definición:

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r} = z\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'}{\| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}' \|^3} dq(\overrightarrow{r}')$$

Al parametrizar, tendremos que: $\overrightarrow{r} = z\hat{k}$; $\overrightarrow{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$; $dq(\overrightarrow{r}') = \sigma dx'dy'$ con$-\frac{w}{2} \leq$ x $\leq \frac{w}{2}$, y $-\infty \leq$y$\leq \infty$

Entonces

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{(z\hat{k} - x'\hat{i} - y'\hat{j})\sigma dx'dy'}{(z^2+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De los tres términos generados, por simetría, sólo el primero es no nulo, pues se trata en los dos casos siguientes de integrales de funciones impares en intervalo simétrico. El cálculo se reduce a:

$$\overrightarrow{E} = \frac{z\sigma\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'dy'}{(z^2+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\sigma\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'}{(z^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'(z^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{(z^2+x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Usando el conveniente cambio:
$\sqrt{x'^2+z^2}tg(u) = y'$
$\sqrt{x'^2+z^2}sec^2(u)du = dy'$

$$= \frac{z\sigma\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'}{(z^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x'^2+z^2}sec^2(u)du(z^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{((z^2+x'^2)sec^2(u))^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{z\sigma\hat{k}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'}{(z^2+x'^2)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(u)du = \frac{z\sigma\hat{k}}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \frac{dx'}{(z^2+x'^2)}$$

Por último, con:
$ztg(\alpha) = x'$
$zsec^2(\alpha)d\alpha = dx'$

$$= \frac{z\sigma\hat{k}}{2\pi\varepsilon_0}\int_{arctg\left(-\frac{w}{2z}\right)}^{arctg\left(\frac{w}{2z}\right)} \frac{zsec^2(\alpha)d\alpha}{z^2sec^2(\alpha)} = \frac{\sigma\hat{k}}{2\pi\varepsilon_0}\left[arctg\left(\frac{w}{2z}\right) - arctg\left(-\frac{w}{2z}\right)\right] = \frac{\sigma\hat{k}}{\pi\varepsilon_0}arctg\left(\frac{w}{2z}\right)$$

Con el resultado obtenido, sólo basta plantear la resta.

Problema 2

Dada la naturaleza de la geometría de la situación, se hace necesario utilizar el ppio. de superposición. Eso sí, en éste caso podemos ocupar adicionalmente la *Ley de Gauss*, facilitando la obtención del campo eléctrico. La idea es primero utilizar lo anterior y encontrar con ello el valor de los campos en P, para luego sumarlos. (Para lo que habrá que efectuar una transformación entre los sistemas de referencia).

Para la recta, utilizamos un cilindro que encierre un cierto volúmen, con dicha recta en su eje. Denotamos A la altura de él, información sólo necesaria para caracterizarlo, prescindible en realidad. Después, notamos posible dirección y/o coordenada(s) de dependencia del campo, y con todo lo anterior se lleva a cabo el cálculo. Dada la simetría del problema, (en altura y orientación se enfrenta el mismo escenario), es razonable suponer que el campo depende del radio, y que su dirección apunta según *rho*.

$$\int_{S=dV} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}$$

$$\overrightarrow{E} = E(\rho)\hat{\rho}$$

Si bien la superficie S representa toda la cubierta del volúmen del cilindro, sólo ciertas partes son de interés. Las tapas, arriba y abajo, tienen normales perpendiculares a ρ, lo que muestra que los productos puntos en la integral serán cero. De ésta forma, sólo importa el manto del cilindro. Así:

$$\int_0^A\int_0^{2\pi} E(\rho)\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}\rho d\theta dz = \frac{A\lambda}{\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}$$

Para el plano, efectuamos un razonamiento análogo. Por conveniencia, nuevamente elegimos un cilindro, que será quien encierre, eventualmente, toda la carga. Esta vez eso sí, la simetría del problema cambia, por lo que las suposiciones sobre dependencia y dirección del campo son igualmente distintas.

Sabemos que hay simetría en orientación y radio, pero no necesariamente en altura. Por ello, podemos asumir que el campo dependerá, en el peor caso, de z. Por la forma del problema, se sabe con certeza que la dirección del campo es según $\hat{k}$, o -$\hat{k}$, dependiendo del sistema de referencia y la posición en el espacio. Para ésta situación podemos asumir $\hat{k}$, colocando correspondientemente el sist. de referencia. Adicionalmente vemos que sólo las tapas del cilindro son de interés, pues el manto, con normal según $\hat{\rho}$, anula su aporte a la integral. Así, (ojo que el aporte de las tapas es doble):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} E(z)\hat{k}\cdot\hat{k}\rho d\rho d\theta = \frac{\sigma\pi\rho^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\overrightarrow{E}(z)\frac{\rho^2}{2}2\pi = \frac{\sigma\pi\rho^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Para unir los resultados basta intercambiar ρ por h en el campo producido por la recta, (para referir al punto P directamente, ya que el aporte del campo generado por el plano es cte. independiente de la posición), y escribir $\hat{\rho}$ en el sistema de referencia del plano. De un sencillo análisis geométrico,

$$cos(90-2\alpha)\hat{\imath} - sen(90-2\alpha)\hat{k} = \hat{\rho} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{E}(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\left(cos(90-2\alpha)\hat{\imath} - sen(90-2\alpha)\hat{k}\right)$$

Por supuesto, queda a criterio de quien resuelva el problema el sistema en que quiera escribir la solución, mientras sea ortonormal y consistente en todo el término.

Problema 3

(1) Planteando la integral, tendremos que:

$$\int_{esfera} \rho(\overrightarrow{r})dV = \int_{esfera} \frac{5k}{4\pi a^5}\rho^2\rho^2 sen(\theta)d\rho d\theta d\varphi = Q_{total} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{5k}{4\pi a^5}\rho^4 sen(\theta)d\rho d\theta d\varphi = \frac{5k}{4\pi a^5}\left(\frac{a^5}{5}\right)(2)(2\pi) = k$$

(2) Nuevamente por *Ley de Gauss*, asumiendo:

$$\overrightarrow{E} = E(\rho)\hat{\rho}$$

Dada la distribución de cargas, finita, debemos separar los casos para el campo eléctrico en ρ. Usando coordenadas esféricas, se tiene:

Si $\rho \leq a$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(\rho)\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}\rho^2 sen(\theta)d\theta d\varphi = \frac{\int \frac{5k}{4\pi a^5}\rho^4 sen(\theta)d\rho d\theta d\varphi}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(\rho)\rho^2 4\pi = \frac{5k}{4\pi a^5}\frac{\rho^5}{5\varepsilon_0}4\pi \Rightarrow \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{k\rho^3}{4\pi a^5\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

Si $\rho > a$

$$\int \overrightarrow{E}(\rho)\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0} = \frac{k}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(\rho)\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}\rho^2 sen(\theta)d\theta d\varphi = \frac{k}{\varepsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{k}{4\pi\rho^2\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

Observación: Es importante notar que el campo es contínuo en a. Esto no es algo trivial y en general debiera analizarse por separado.

(3) El potencial eléctrico corresponde al valor del trabajo que se necesita para alejar o acercar una carga hacia otra disposición de ellas. Como depende directamente del campo eléctrico, (dada su definición), el cálculo en ésta parte también estará diferenciado según el radio de la esfera fuente. Dado que ésta posee una cantidad finita de cargas, se asume que V($\rho = \infty$) = 0. Por definición:

$$V(\overrightarrow{r}) = -\int_{\overrightarrow{r}_0}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{dr} \Rightarrow$$

Si $\rho > a$

$$V(\rho) = -\int_{\infty}^{\rho} \frac{k}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}\hat{\rho}\cdot - d\rho\hat{\rho} = -\frac{k}{4\pi\rho\varepsilon_0}$$

Observación: Notar que en el resultado anterior la dirección del diferencial de posición es *en contra* del vector unitario $\hat{\rho}$, pues la partícula cargada es traída *desde el infinito* hasta una posición a distancia radial ρ de la esfera.

Si $\rho \leq a$

$$V(\rho) = -\int_{\infty}^{a} \frac{k}{4\pi\varepsilon_0\rho^2}\hat{\rho}\cdot - d\rho\hat{\rho} + -\int_{a}^{\rho} \frac{k\rho^3}{4\pi a^5\varepsilon_0}\hat{\rho}\cdot - d\rho\hat{\rho} = -\frac{k}{4\pi a\varepsilon_0} + \frac{k}{4\pi\varepsilon_0 a^5}\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right)$$

(4) La Ley de Gauss posee una forma en la que se expresa como sigue:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho(\overrightarrow{r})}{\varepsilon_0}$$

Con ésto, es fácil ver que lo pedido corresponde a los datos entregados. La divergencia del campo eléctrico es nula fuera de la esfera, y vale la densidad de carga volumétrica dada al interior, dividida por la cte. ε_0.

Problema 4

Ppto.
Se sugiere comenzar con la fórmula que entrega la Ley de Gauss para situaciones con distribuciones volumétricas, recién citada.