

Resolución Auxiliar N° 3

Prof. Aux.: Felipe L. Benavides

Fecha: Lunes 18 de Agosto de 2008

Problema 1

El sistema queda representado por la siguiente figura,

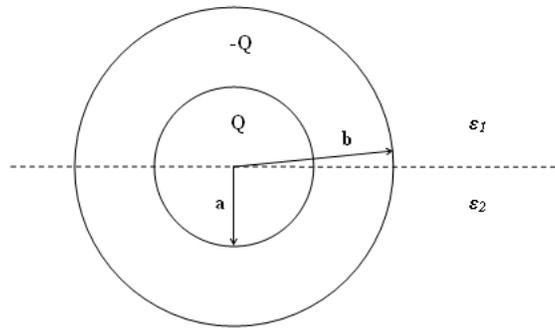


Figura N° 1

a) Como las superficies esféricas son conductores, las cargas presentes por enunciado $+Q$ y $-Q$ son, necesariamente, libres. Así,

$$\sigma_a 4\pi a^2 = Q \text{ y } \sigma_b 4\pi b^2 = -Q$$

De allí, pueden deducirse los valores de las densidades de carga libre presentes, donde se asumen distribuciones de carga uniformes pues se trata de materiales conductores (lo que permite escribir que las cargas por unidad de área, que multiplicadas por el área, serán la carga total). La mitad de cada cascarón, tendrá,

$$\begin{cases} \frac{Q}{4\pi a^2} 2\pi a^2 = \frac{Q}{2} & \text{Sup. } r = a \\ -\frac{Q}{4\pi b^2} 2\pi b^2 = -\frac{Q}{2} & \text{Sup. } r = b \end{cases}$$

b) Para calcular el vector Desplazamiento Eléctrico, utilizamos ley de Gauss en su forma general para materiales polares. No podemos utilizar la ley de Gauss en su forma básica para el campo eléctrico pues ésta asume que se encierran cargas en una superficie no polar, el vacío. De argumentos geométricos, y usando que los campos apuntan según \hat{r} , se obtiene que dentro de la esfera, dentro del primer cascarón conductor esférico, tanto campo como desplazamiento eléctrico son nulos.

Como se trata de caracterizar la esfera, basta escribir el valor del Desplazamiento *entre* los cascarones conductores en cuestión. Al encerrar con una superficie esférica el cascarón conductor de radio a , con una esfera de radio r , ($a < r < b$), usamos, en coordenadas esféricas, que

$$\vec{D}(r) = D(r)\hat{r}$$

Así,

$$\oint_{S=dV} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = Q_L$$

Aquí debemos detenernos un poco. Como se trata de dos materiales diferentes, (con permitividades dieléctricas diferentes), en principio no es posible asumir que se trata sólo de un vector desplazamiento eléctrico. Perfectamente podrían haber dos, diferentes, en cada material. La única forma de despejar ésta interrogante es usar condiciones de borde. Éstas, (que se cumplen en cualquier situación), son;

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} & (i) \\ D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l & (ii) \end{cases}$$

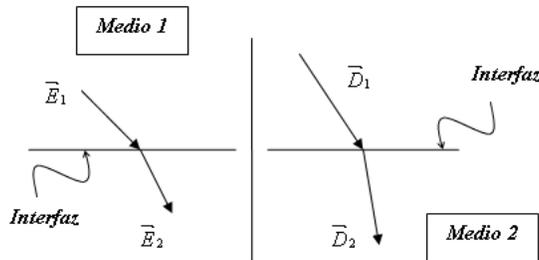


Figura N° 2

Suponiendo dos materiales según la figura 1, y campos \vec{D} y \vec{E} , (i) significa que la componente de campo eléctrico tangencial a la superficie es equivalente entre ambos materiales, y (ii), que las componentes normales del desplazamiento entre ambos materiales difieren según la carga libre que haya en la interfaz, según se muestra en la figura 2. Usando (i), $\vec{D} = \epsilon \vec{E} (= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E})$, y evaluando la expresión en la región ecuatorial del sistema,

$$\frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{D_2}{\epsilon_2}$$

Volviendo a la ecuación de Gauss, tendremos,

$$D_1(r) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_1(r) = \frac{Q}{2\pi r^2}$$

Así,

$$\vec{D}_1(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{D}_2(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \hat{r}$$

c) Para la diferencia de potencial, planteamos la resta de potenciales entre a y b . (Intuitivamente, el potencial es mayor en la carga positiva, i.e., en a , y menor en b).

$$V(a) - V(b) = - \int_\infty^a \vec{E} \cdot d\vec{r} - - \int_\infty^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

De las ecuaciones anteriores,

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} \frac{1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \hat{r}$$

Finalmente,

$$V(a) - V(b) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

Efectivamente, por la presencia de cargas libres, hay cargas de polarización en el sistema. Dichas cargas se alojan en la vecindad de los casquetes esféricos y tienen signo opuesto a ellos, mayoritariamente. Pueden ser calculadas obteniendo el vector polarización y con él, las cargas superficiales y volumétricas de polarización.

Problema 2

Lo primero en éste problema es comprender porqué es posible obtener una expresión para el potencial en función de la altura de cierto líquido, y de allí calcular dicho potencial. La idea de la situación es que el potencial en la placa conductora a altura h depende de los valores del campo eléctrico que están definidos bajo ella. Como el potencial es cero en la placa inferior, (pues está conectado a tierra), la medición de los campos comienza desde allí, y se ve afectada por los materiales que atraviesa.

La batería inicialmente coloca una diferencia de potencial V_0 entre las placas superior e inferior. Dicho potencial está siendo generado por un campo eléctrico que apunta desde las cargas positivas, a las negativas, i.e., según $-\hat{k}$. Es intuitivo pensar que si hay un material con permitividad dieléctrica en el camino del campo eléctrico, dicho campo se verá *disminuído*.

Ésto pues el campo atraerá las cargas negativas hacia arriba, y las positivas, hacia abajo, polarizándolo, y por lo tanto formando un campo eléctrico por cargas de polarización *opuesto* al inicial, dentro del material. De ésta forma, la altura del frasco dirá acerca de la cantidad de líquido que “obstruirá” el paso del campo, y por lo tanto, el potencial en la segunda placa conductora descargada variará según h .

Necesitamos entonces conocer el campo, e integrarlo después. Para ello, planteamos ley de Gauss para materiales polares, con la carga $-Q$ entre medio, y mediante condiciones de borde despejamos el valor de campo afuera. Lo primero es notar que el campo eléctrico arriba de la primera placa conductora es cero, y bajo la tercera, también. Ésto pues el potencial no se ve alterado ni más arriba ni más abajo de las placas, luego el campo *debe* ser nulo. Usando un cilindro de radio r con altura y disposición cualquiera tq. se encuentre dentro del material su tapa superior, y bajo la placa conductora inferior la tapa opuesta, se tendrá, (asumiendo campos y desplazamiento a lo más dependientes de z , y apuntando según $-\hat{k}$),

$$\vec{D}(r) = -D(z)\hat{k}$$

$$\oint_{S=dV} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_L$$

Sólo las tapas superior e inferior constituyen aportes, pues el manto tiene normal perpendicular al desplazamiento eléctrico. La tapa de arriba dentro del material entrega un valor, pero la que se encuentra bajo la placa conductora inferior no, pues notamos ya que el campo eléctrico era nulo. En coordenadas cilíndricas,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r D(z)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^r -\sigma\rho d\rho d\theta$$

$$-D\pi r^2 = -\sigma\pi r^2 \Rightarrow D = \sigma$$

Así, con la magnitud del desplazamiento eléctrico obtenida,

$$\vec{D}(r) = -\sigma\hat{k} \Rightarrow$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$$

Dentro del material. Afuera, podemos usar ley de gauss denuevo, pero para la placa superior ésta vez. La otra opción, es simplemente usar condiciones de borde. Como la interfaz, definida como la capa que separa el líquido del

aire, no está cargada, los vectores desplazamiento eléctrico son iguales, y con ello, $(D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l \Leftrightarrow D_1 = D_2)$, afuera del material,

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{k}$$

Con los campos listos, basta despejar la expresión para el potencial en h . El único problema es que σ es inicialmente desconocido, (no es dato del problema), aunque es calculable. De plantear que el potencial entre las placas superior e inferior es V_0 , puede despejarse dicha constante. Así, (distinguiendo con números los campos para destacar que no son iguales),

$$V_0 = -\int_0^h \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + -\int_h^{h+d} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + -\int_d^{d+a} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma h}{\varepsilon} + \frac{\sigma(d-h)}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{V_0 \varepsilon \varepsilon_0}{h \varepsilon_0 + (d-h+a) \varepsilon} (*)$$

Así,

$$V(h) = -\int_0^h \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + -\int_h^d \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon} h + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (d-h) (**)$$

Reemplazando (*) en (**),

$$V(h) = V_0 \left(\frac{h \varepsilon_0 + (d-h) \varepsilon}{h \varepsilon_0 + \varepsilon (d-h+a)} \right)$$

Problema 3

Planteando las situaciones descritas y la energía asociada según la fórmula,

i.

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = D \hat{x}, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_2 = p \hat{y}$$

$$U_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p^2}{D^3}$$

ii.

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = D \hat{x}, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_2 = p \hat{x}$$

$$U_{ii} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{p^2}{D^3} - 3 \frac{p^2 D^2}{D^5} \right) = -\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0 D^3}$$

Así,

$$U_i - U_{ii} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p^2}{D^3}$$

b) Si se liberan desde el reposo, la energía tenderá a disminuir, luego las distancias entre sus centros serán mayores o menores según las ecuaciones muestren. En i, la energía disminuye si D aumenta, por lo que los dipolos se repelerán. En ii, la energía disminuye si D disminuye, por lo tanto, los dipolos se atraerán. En efecto, puede estimarse aceleración, velocidad y tiempo de interacción, por ejemplo, modelando como un sistema newtoniano, y utilizando que

$$\|F_i\| = \left\| \frac{\partial U_i}{\partial D} \right\|, \quad \|F_{ii}\| = \left\| \frac{\partial U_{ii}}{\partial D} \right\|$$