Solución Auxiliar Nº 5 FI2A2

Prof. Aux.: Felipe L. Benavides

Fecha: Lunes 01 de Septiembre de 2008

Problema 1

Éste problema es ciertamente sencillo. Sólo es importante tener cuidado con los efectos en los bordes. Dada la geometría del sistema, podemos asumir que el campo tiene simetría cilíndrica, con dependencia sólo en ρ, y que apunta según $\hat{\rho}$. Con lo anterior, en cada caso basta plantear Gauss con campo o desplazamiento eléctrico, (según corresponda), y concluir. Se tendrá que:

$\rho < a$;

$$\int_0^{z_0}\int_0^{2\pi} D(\rho)\rho d\theta dz = \int_0^{z_0}\lambda_0 dz \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{D}(\rho) = \frac{\lambda_0}{2\pi\rho}\hat{\rho},\ \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{\lambda_0}{2\pi\rho\varepsilon_a}\hat{\rho}$$

$a < \rho < c$;

$$\overrightarrow{D}(\rho) = \overrightarrow{E}(\rho) = 0$$

$c < \rho < b$;

$$\int_0^{z_0}\int_0^{2\pi} D(\rho)\rho d\theta dz = \int_0^{z_0}\lambda_0 dz + \pi(c^2-a^2)\int_0^{z_0}\lambda_1 dz \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{D}(\rho) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1\pi(c^2-a^2)}{2\pi\rho}\hat{\rho},\ \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1\pi(c^2-a^2)}{2\pi\rho\varepsilon_b}\hat{\rho}$$

$\rho > b$;

$$\int_0^{z_0}\int_0^{2\pi} E(\rho)\rho d\theta dz = \frac{\int_0^{z_0}\lambda_0 dz + \pi(c^2-a^2)\int_0^{z_0}\lambda_1 dz}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{D}(\rho) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 \pi (c^2 - a^2)}{2\pi\rho}\hat{\rho},\ \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 \pi (c^2 - a^2)}{2\pi\rho\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

$\rho = a, c$;

$$\overrightarrow{D}(\rho)\nexists,\ \overrightarrow{E}(\rho)\nexists$$

Es importante notar que se tuvo cuidado con los bordes de cada volúmen, en el caso del volúmen conductor. Como el campo es cero justo dentro de él, dadas sus propiedades, (reacomodo de cargas frente a un campo eléctrico cualquiera), y distinto de cero justo después, no es posible definirlo *en la interfaz.* Observamos también que en $\rho = b$ el vector desplazamiento es contínuo, pero el campo no. Esto se debe a que en la superficie de separación entre el vacío y el dielétrico, aparece una densidad de carga de polarización, no carga libre. (Lo que es coherente con la condición de borde $D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s$)

Problema 2

Para resolver éste problema, se utilizará gauss nuevamente, asumiendo que dada la geometría del sistema, el campo depende sólo del radio, en coordenadas esféricas, y apunta según $\hat{r}$. Ésta suposición es algo fuerte, pero puede fundamentarse pues el dieléctrico es coherente con la esfera en términos de que la superficie tangencial, entre los casquetes conductores, se orienta según $\hat{r}$. Así, llamando I al volúmen dentro del dieléctrico, y II al restante entre los casquetes, basta despejar el valor del campo y usar las fórmulas conocidas para todo lo demás pedido. Queda: (entre los casquetes)

$a < r < b$;

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(r) r^2 sen(\theta) d\theta d\phi = Q \Rightarrow$$

$$D_1(r)\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha} r^2 sen(\theta) d\theta d\phi + D_2(r)\int_0^{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi} r^2 sen(\theta) d\theta d\phi = Q \Rightarrow$$

$$D_1(r) 2\pi r^2 (1 - cos(\alpha)) + D_2(r) 2\pi r^2 (1 + cos(\alpha)) = Q$$

En éste punto debemos usar alguna ecuación que relacione ambos desplazamientos. De las condiciones de borde, se tiene que:

$$\begin{cases} D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s & (1) \\ E_{1t} = E_{2t} & (2) \end{cases}$$

Ambas condiciones son, en general, *linealmente independientes*. Sin embargo, dado que $\overrightarrow{D} = \varepsilon \overrightarrow{E}$, con ε conocido en ambos lados, necesitamos una sola de ambas. Utilizaremos la expresión (2) por simplicidad, pero la primera, más la definición del vector desplazamiento, también resolverían el problema. (Sólo que habría que usar consideraciones entre el volúmen dentro de los casquetes, y aquel afuera, o dentro del casquete conductor pequeño, radio a. Usando lo recién nombrado, tenemos:

$$\frac{D_1}{\varepsilon} = \frac{D_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{D}_1(r) = \frac{Q}{2\pi r^2 \left(1 - cos(\alpha) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(1 + cos(\alpha))\right)}\hat{r},\ \overrightarrow{D}_2(r) = \frac{Q}{2\pi r^2 \left(1 + cos(\alpha) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(1 - cos(\alpha))\right)}\hat{r}\ y$$

$$\overrightarrow{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r^2 \left(\varepsilon_0(1 + cos(\alpha)) + \varepsilon(1 - cos(\alpha))\right)}\hat{r}$$

Notamos a ésta altura que la carga Q, según el enunciado, es desconocida. Esto no es una complicación, pues con la expresión recién obtenida del campo, basta calcular el potencial e igualar con el dato V_0 del problema. Queda: (usando que $g_0 = \varepsilon_0(1 + cos(\alpha)) + \varepsilon(1 - cos(\alpha))$)

$$-\int_{\overrightarrow{r_0}}^{\overrightarrow{r}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr} = V(\overrightarrow{r}) \Rightarrow$$

$$-\int_b^a \frac{Q}{2\pi r^2 g_0} dr = V_0 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{2\pi g_0 V_0 ab}{b - a}$$

Para la polarización, separamos por casos:

$\forall\theta \in [0, \alpha],\ \phi \in [0, 2\pi]\ y\ r \in (a, b);$

$$\overrightarrow{P} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)Q}{2\pi r^2 g_0}\hat{r}$$

$\forall\theta \in [\alpha, \pi],\ \phi \in [0, 2\pi]\ y\ r \in (a, b);$

$$\overrightarrow{P} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_0)\overrightarrow{E} = 0$$

Las densidades de carga de polarización quedan: (Para el primer caso con $\overrightarrow{P}$ no nulo)

$$\rho_p = -\nabla \cdot \overrightarrow{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(P \cdot r^2) = 0$$

$$\sigma_p = \begin{cases} -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi a^2 g_0} & r = a \\ \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\pi b^2 g_0} & r = b \end{cases}$$

Problema 3

Situación I.

Primero planteamos la expresión lineal para la permitividad del dieléctrico. Se tiene:

$$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} z + \varepsilon_1$$

Buscamos

$$C = \frac{Q}{\triangle V},$$

pues con ésta expresión, la capacidad por unidad de área es simplemente lo mismo sobre el área total. (Asumiremos conocido Q magnitud de la carga de las placas conductoras del capacitor, y calcularemos respecto del éste valor algo del estilo $\triangle V(Q)$, para después simplemente dividir. Usando Gauss en el electrodo superior con una superficie cerrada cilíndrica, imponiendo que el campo arriba de la placa conductora es nulo y que apunta hacia abajo, queda:

$$\int \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{S} = Q \Rightarrow$$

$$-D\triangle S = Q \Rightarrow \overrightarrow{D} = -\frac{Q}{\triangle S}\hat{k} \Rightarrow \overrightarrow{E}(z) = \frac{-Q}{\triangle S\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z + \varepsilon_1\right)}\hat{k}$$

Integrando el campo para obtener el potencial,

$$-\int_0^d \frac{-Q}{\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}z + \varepsilon_1\right)\triangle S} dz = V_0 \Rightarrow$$

$$\frac{Q}{\triangle V} = C = \frac{\triangle S(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)}$$

Por lo tanto la capacidad por unidad de área pedida es:

$$C = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)}$$

Situación II.

Queda propuesto. La versión inicial es simplemente demostrativa, la idea es que se pruebe con distintas configuraciones, para distancias diferentes entre la lámina conductora y las placas superior e inferior, y para diferentes permitividades dieléctricas.