Resolución Auxiliar N^{o}6 FI2A2

Prof. Aux.: Felipe L. Benavides

Fecha: Lunes 22 de Septiembre de 2008

Problema 1

Éste tipo de problemas es muy común, y su solución por tanto también es bastante estándar. La idea es calcular la corriente en función del potencial V_0 al que está sometido el material, y de allí simplemente despejar la fracción $\frac{V_0}{I}$. Se asume por supuesto I constante, no así $\overrightarrow{J}$, que depende de la posición para permitir que lo anterior se cumpla, (se trata de régimen permanente). Con ella entonces, después de despejar $\overrightarrow{J}$, se obtiene $\overrightarrow{E}$, y con él, V_0. Dada la disposición geométrica del sistema, el vector densidad de corriente apunta según $\hat{r}$. Resolviendo entonces,

$$I = \int \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} J(r) r^2 sen(\theta) d\theta d\phi$$

$$I = 4\pi J(r) r^2 \Rightarrow \overrightarrow{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Ahora, por ley de Ohm,

$$g\overrightarrow{E} = \overrightarrow{J} \Rightarrow \overrightarrow{E} = \frac{I}{4\pi g_i r^2}\hat{r}$$

Con i=1,2. Como la densidad de corriente es contínua en el espacio, (ppto. probarlo en éste caso, aunque es muy sencillo), la expresión se mantiene y sólo varían los g de la conductividad de los materiales. Calculando entonces la diferencia de potencial, se obtiene:

$$V_0 = V(a) =$$

$$= -\int_c^a \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^c \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \frac{I}{4\pi g_1 r^2} dr + \int_b^c \frac{I}{4\pi g_2 r^2} dr \Rightarrow$$

$$V_0 = \frac{I}{4\pi g_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{I}{4\pi g_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

$$\therefore R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{4\pi g_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{4\pi g_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$$

Problema 2

Para resolver éste problema se plantea un circuito equivalente donde se divide la resistencia del calefactor en 2 trozos, y se conecta, en paralelo con la de más abajo, una equivalente a la persona. Por notación, usando que I_1 es la corriente que circula por el primer trozo de la resistencia, I_2 el que circula por la persona, e I_3, por el segundo trozo, se pide conocer entonces:

$$I_2 = I_1 - I_3$$

Para ello, se plantean las siguientes ecuaciones, (de Ohm y Kirchoff):

$$(LVK)\ 220 = \frac{I_1 R}{2} + \frac{I_3 R}{2}$$

$$(LVK)\ \frac{I_3 R}{2} = I_2 \cdot 10000$$

$$(LCK)\ I_1 = I_2 + I_3$$

Para despejar el sistema falta una ecuación, pues R es desconocido. Aquí usaremos que:

$$\frac{V^2}{R} = 2000\ (*)$$

Es decir, planteamos la expresión de potencia para el calefactor. Según el enunciado, podemos usar que la potencia consumida es nominal, y no es aquella referida al momento de la falla. El cálculo utilizado para ésto es exacto, y la resolución tiene total precisión. Si la potencia referida en el enunciado se tratase del consumo al momento de producirse la falla, la última expresión es sólo una aproximación. Dado que la corriente que circula por la persona es pequeña, (pues la resistencia es muy grande), no es una mala aproximación. Debieran sumarse todos los otros términos, pero sólo consideran corrientes pequeñas elevadas al cuadrado, i.e., valores ciertamente despreciables frente a la primera componente. Por ello, el procedimiento es equivalente en ambos casos, salvo que en el primero es exacto y en el segundo es una aproximación. (Aunque razonable. Sumar todos los términos también resuelve el problema, sólo que el despeje del sistema es muy largo y complejo). Resolviendo, tendremos:

$$I_2 = \frac{220 \cdot 2}{R + 4 \cdot 10^4}$$

De (*), $R = 24.2[\Omega] \Rightarrow$

$$I_2 \cong 0.011 = 11[mA]$$

El valor confirma que la aproximación no es mala, pues efectivamente I_2 es pequeña, dado que la resistencia del calefactor es mucho menor que la de la persona. (En órdenes de magnitud incluso).

Problema 3

a) Para encontrar la densidad de carga libre en la interfaz, podemos usar

$$(\overrightarrow{D}_2 - \overrightarrow{D}_1) \cdot \hat{n} = \sigma_l\ (1)$$

En régimen permanente, dado que los materiales exhiben una conductividad no nula, hay corriente. Por continuidad, (conservación de la carga):

$$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r}, t)$$

La condición de régimen permanente queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\overrightarrow{r}, t) = 0$$

Así

$$\overrightarrow{J}(z) = -J\hat{k}$$

Tomando positivo z de izquierda a derecha, según el dibujo de la figura en el enunciado. Como adicionalmente, (por ley de Ohm):

$$\overrightarrow{J} = g\overrightarrow{E} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{E}_1 = -\frac{J}{g_1}\hat{k};\ \overrightarrow{E}_2 = -\frac{J}{g_2}\hat{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{D}_1 = -\frac{J}{g_1}\varepsilon_1\hat{k};\ \overrightarrow{D}_2 = -\frac{J}{g_2}\varepsilon_2\hat{k}$$

Pero a priori no es conocida ni la corriente, ni su densidad. Por ello, necesitamos encontrar una expresión que ligue los datos restantes del problema con la información ya construída. En efecto, por potencial, tendremos:

$$-\int_0^{d_1+d_2} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} = V_0 \Rightarrow$$

$$-E_1 d_1 - E_2 d_2 = V_0 \Rightarrow$$

$$\frac{J}{g_1} d_1 + \frac{J}{g_2} d_2 = V_0 \Rightarrow$$

$$J = \frac{V_0 g_1 g_2}{g_1 d_2 + g_2 d_1}$$

Reemplazando éste último valor en los vectores desplazamiento antes construídos y con ello despejando (1):

$$-\frac{V_0 g_1 \varepsilon_2}{g_1 d_2 + g_2 d_1} + \frac{V_0 g_2 \varepsilon_1}{g_1 d_2 + g_2 d_1} = \sigma_l$$

$$\therefore \frac{V_0}{g_1 d_2 + g_2 d_1} (g_2 \varepsilon_1 - g_1 \varepsilon_2) = \sigma_l$$

b) Ésta nueva situación es de régimen transitorio. Para la interfaz, se tiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(\overrightarrow{r}, t) \neq 0 \right) \Rightarrow J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial}{\partial t} \sigma_l$$

La idea es despejar de ésta ecuación el término para la derivada parcial de la densidad de carga libre en la interfaz. Para ésto, se necesitan dos ecuaciones que liguen a los términos J_{2n} y J_{1n}, y que dicha relación, (ojalá), exhiba términos en función de σ_l, para luego simplemente resolver la EDO que resulte. Nuevamente, (sólo que con el cuidado de trabajar con dos densidades no necesariamente iguales),

$$\overrightarrow{E}_1 = -\frac{J_1}{g_1} \hat{k}; \ \overrightarrow{E}_2 = \frac{J_2}{g_2} \hat{k}$$

Como el potencial es igual en ambos lados, (pues están conectados a tierra),

$$\frac{J_1 d_1}{g_1} = \frac{J_2 d_2}{g_2} \ (-\int \overrightarrow{E}_1 \cdot d\overrightarrow{r} = -\int \overrightarrow{E}_2 \cdot d\overrightarrow{r}) \ (2)$$

Es importante destacar aquí que el potencial entre la interfaz y las placas conductoras depende del tiempo (pues está conectado a tierra, luego debe descargarse). Por ello no es posible igualar a cero dichos cálculos. Por supuesto, los campos dependen del tiempo, pero no de la posición. Si hubiera una dirección preferencial de carga/descarga, habría un campo eléctrico aplicado distinto de cero en la vecindad de dicha posición, lo que genera una contradicción con lo recién supuesto de simple conexión a tierra.

Nuevamente,

$$(\overrightarrow{D}_2 - \overrightarrow{D}_1) \cdot \hat{n} = \sigma_l \Rightarrow$$

$$\frac{J_2 \varepsilon_2}{g_2} + \frac{J_1 \varepsilon_1}{g_1} = \sigma_l \ (3)$$

De (2) y (3),

$$J_1 \left(\frac{\varepsilon_1}{g_1} + \frac{\varepsilon_2 d_1}{g_1 d_2} \right) = \sigma_l$$

Reemplazando finalmente éste último valor en cada uno de las densidades de corriente para la interfaz, (ecuación de continuidad), y utilizando adicionalmente (2),

$$-\frac{\partial}{\partial t}\sigma_l = \sigma_l\left(\frac{g_1 d_2 + g_2 d_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}\right)$$

$$\therefore \sigma_l(t) = \sigma_l(0)e^{-\lambda t}$$

Con

$$\lambda = \left(\frac{g_1 d_2 + g_2 d_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}\right).$$

Problema 4

La resolución de éste ejemplo plantea inicialmente un sistema de ecuaciones. Se cumplen, por conservación de energía y de la ecuación de fzas. de Newton,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = qV & (1) \\ \frac{mv^2}{\left(\frac{x}{2}\right)} = qvB & (2) \end{cases}$$

Donde v corresponde a la rapidez de la partícula, $\dot{\theta}\frac{x}{2}$. De aquí, resolviendo,

$$m = \frac{1}{8}\frac{B^2x^2q}{V}$$

Tanto el tiempo dentro del sistema como la función posición instantánea son muy sencillas de deducir a partir de éste punto. La última queda definida despejando $\dot{\theta}$ de las ecuaciones. Se obtiene que:

$$\overrightarrow{r}(t) = \frac{x}{2}\hat{\rho} = \frac{x}{2}\left(cos\left(\frac{8V}{Bx^2}t\right)\hat{i} + sen\left(\frac{8V}{Bx^2}t\right)\hat{j}\right)$$

Imponiendo $\theta(t^*) = \pi$,

$$t^* = \frac{\pi Bx^2}{8V}$$

Durante la resolución se supuso, según el enunciado, que la trayectoria es un arco de circunferencia, sin probarlo. La demostración es muy simple y queda propuesta.