Resolución Aux. N$^{\text{o}}$ 7 FI2A2

Prof. Auxiliar: Felipe L. Benavides

Fecha: Lunes 29 de Septiembre de 2008

Problema 1

Para resolver el ejemplo calcularemos el campo magnético producido por cada uno de los componentes del sistema en el centro del círculo, y luego sumaremos. (Aplicando superposición). De ésta forma, tendremos que para el alambre circular, por definición, (usando la aproximación filiforme pues se trata de un cable),

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\Gamma \frac{d\overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{\| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}' \|^3}$$

Donde, como siempre, $\overrightarrow{r}$ indica la posición en la que se mide, y $\overrightarrow{r}'$ recorre la carga. (En éste caso el flujo de corriente, constante). Parametrizando para el centro del círculo, (colocando allí el orígen de preferencia para efectuar el cálculo, y teniendo cuidado con el signo del diferencial dada la forma en que se recorre la curva),

$$\overrightarrow{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-Rd\theta\hat{\theta} \times (0\hat{k} - R\hat{\rho})}{R^3}$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{R^3} 2\pi\hat{k} = -\frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$$

Para el alambre rectilíneo, usamos por conveniencia, la ley de Ampere, conociendo la dirección del campo previamente por el uso de la regla de la mano derecha. (Ésta es general y muy útil para encontrar la dirección de los campos en situaciones sencillas). Se tiene que, nuevamente, parametrizando para el centro del círculo, (ésta vez colocando el origen en la proyección r de radio del círculo justo sobre el alambre rectilíneo),

$$\int \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\theta = \mu_0 I \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\theta}$$

Vemos que para calcular la suma de los campos no es necesario adaptar los orígenes, pues, según se tomaron inicialmente, los vectores unitarios $\hat{\theta}$ y $\hat{k}$ coinciden. Evaluando en $\rho = r$, y planteando el campo magnético total, se obtiene:

$$\overrightarrow{B}_T(0) = \frac{\mu_0 I}{2}\left(\frac{1}{\pi r} - \frac{1}{R}\right)\hat{k}$$

$$\therefore r = \frac{R}{\pi}$$

Es el valor de r que anula el campo magnético total en el punto deseado.

Problema 2

a) De la ecuación de continuidad para la corriente en régimen permanente,

$$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = 0$$

Como

$$\overrightarrow{J} = g\overrightarrow{E}$$

Y por lo anterior,

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho J)}{\partial\rho} = 0 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{J}(\rho) = \frac{C}{\rho}\hat{\theta}$$

Con C alguna constante por despejar.

b) Por definición, usando (a), (para alguna sección transversal del sistema),

$$I = \int \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^h \int_a^b \frac{C}{\rho}\hat{\theta} \cdot \hat{\theta} d\rho dz = Chln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) La diferencia de potencial V_0 se obtiene tb. por definición, como la integral de línea del campo. Así,

$$g\overrightarrow{E} = \overrightarrow{J} \Rightarrow \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{C}{g\rho}\hat{\theta} \Rightarrow V_0 = \int_0^\pi \frac{C}{\rho g}\rho d\theta = \frac{\pi C}{g}$$

Usando V_0 como dato y resumiendo, se obtiene:

$$\overrightarrow{J}(\rho) = \frac{V_0 g}{\pi\rho}\hat{\theta},\ \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{V_0}{\pi\rho}\hat{\theta},\ I = \frac{V_0 gh}{\pi}ln\left(\frac{b}{a}\right),\ \frac{V_0}{I} = R = \frac{\pi}{ghln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Problema 3

Éste ejemplo es una sencilla aplicación de la Ley de Ampere. Para cada trozo, sabemos a priori que el campo magnético apunta según $\hat{\theta}$, (regla de la mano derecha), y que no depende más que de ρ. El sistema es infinito en z y simétrico, (dadas las simetrías en θ), por lo que podemos afirmar que lo anterior se cumple en todos los casos. Resolviendo,

$$\int_\Gamma \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = \mu_0 I$$

Donde I es la corriente que cruza la superficie encerrada en la curva Γ, cerrada, que recorre la integral de línea. Así,

$\rho \leq a$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\theta = \mu_0 \int \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = \mu_0 J_0 \int_0^{2\pi}\int_0^\rho \rho' d\rho' d\theta = \mu_0 J_0 \frac{\rho^2}{2} 2\pi \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2}\hat{\theta}$$

$a \leq \rho \leq b$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\theta = \mu_0 \int \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = \mu_0 J_0 \pi a^2 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2\rho}\hat{\theta}$$

$b \leq \rho \leq c$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\theta = \mu_0 \int \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = \mu_0 J_0 \left(\pi a^2 - \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_b^{\rho} \rho d\rho d\theta\right) = \mu_0 J_0 \left(\pi a^2 - \frac{1}{5}\pi\left(\rho^2 - b^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \left[a^2 - \left(\frac{\rho^2 - b^2}{5}\right)\right]}{2\rho}\hat{\theta}$$

$c \leq \rho$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\theta = \mu_0 \int \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{S} = \mu_0 J_0 \left(\pi a^2 - \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_b^{c} \rho d\rho d\theta\right) = \mu_0 J_0 \pi \left(a^2 - \frac{1}{5}\left(c^2 - b^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \left[a^2 - \left(\frac{c^2 - b^2}{5}\right)\right]}{2\rho}\hat{\theta}$$

Para que el campo magnético se anule en ésta última situación, (usando que $c = 3a$)

$$a^2 = \frac{(3a)^2 - b^2}{5} = \frac{9a^2 - b^2}{5}$$

$$\therefore b = 2a$$

Problema 4

La única real dificultad que presenta éste problema es la forma en abordarlo. Como las corrientes tienen dos componentes, no puede aplicarse directamente la ley de Ampere, pues es difícil *adivinar* la dirección que el campo tomará. Por definición es difícil también, pues el planteo de las integrales es, al menos, complejo. Tiene solución de ésta manera, pero es trabajo innecesario. La idea es que se trabaje para cada componente de la corriente, y con ello se generen componentes para el campo. La totalidad de ellas, superpuestas, determinan el resultado final. Para cada caso, por separado, si es posible usar la ley de Ampere, y entonces el problema es muy sencillo. Planteando entonces:

$a \leq \rho \leq b$

Componente según $\hat{\theta}$, $\overrightarrow{J} = \frac{\alpha}{\rho}\hat{\theta}$. Suponiendo la dirección del campo generado según $\hat{k}$, por la regla de la mano derecha, (y única dependencia en ρ dadas las simetrías en z y θ),

$$\int_0^{z'} B(\rho) dz = \mu_0 \int_0^{z'}\int_a^{\rho} \frac{\alpha}{\rho'} d\rho' dz = \mu_0 \alpha ln\left(\frac{\rho}{a}\right) z' \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \mu_0 \alpha ln\left(\frac{\rho}{a}\right)\hat{k}$$

Componente según $\hat{k}$, $\overrightarrow{J} = \beta\hat{k}$. Suponiendo ésta vez la dirección del campo generado según $\hat{\theta}$, tb. con la regla de la mano derecha, y la misma dependencia espacial para el campo, (por los mismos argumentos anteriores), tendremos:

$$\int_0^{2\pi} B(\rho)\rho d\theta = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_a^{\rho} \beta \rho d\rho d\theta = \mu_0 \beta \left(\frac{\rho^2 - a^2}{2} \right) 2\pi \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \mu_0 \beta \left(\frac{\rho^2 - a^2}{2\rho} \right) \hat{\theta}$$

Así, el campo magnético total para ésta zona es:

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \mu_0 \left[\beta \left(\frac{\rho^2 - a^2}{2\rho} \right) \hat{\theta} + \alpha ln \left(\frac{\rho}{a} \right) \hat{k} \right]$$

$b \leq \rho$

El razonamiento es análogo, y los cálculos, muy parecidos. El resultado final es:

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \mu_0 \left[\beta \left(\frac{b^2 - a^2}{2\rho} \right) \hat{\theta} + \alpha ln \left(\frac{b}{a} \right) \hat{k} \right]$$

$\rho \leq a$

Aquí el campo total es cero. Esto no puede sólo concluirse de la ley de Ampere, puesto que si una integral de línea para una curva cerrada es nula, no necesariamente el integrando es siempre nulo. Eso sí, el vector campo magnético *debe ser nulo* si se sabe que no depende de las variables de integración. Esto, pues si no fuera así la integral *no sería cero.* En éste caso puede argumentarse que, dadas las simetrías, en el mejor caso puede haber dependencia de ρ, pero nada más. Adicionalmente, de la expresión general por definición, dada la ausencia de densidad de corrientes y usando las simetrías del problema, (que permiten separar el desarrollo espacialmente), se concluye similarmente.