Resolución Auxiliar Nº 8

Prof. Aux.: Felipe L. Benavides

Fecha: Lunes 6 de Octubre de 2008

Problema 1

a)

i. Si se desprecian efector de borde, (i.e., se aproxima el campo dentro de la bobina por el de una muy larga), el campo magnético $\overrightarrow{H}$ es, (por Ley de ampére, usando que el campo magnético fuera de la bobina es nulo),

$$\overrightarrow{H} = nI\hat{k}$$

Donde $\hat{k}$ es un vector unitario a lo largo del eje del solenoide, y n es el número de vueltas del enrollado, por unidad de longitud. La magnitud del campo es finalmente,

$$\overrightarrow{H} = \left(2.4 \cdot 10^4 \left[\frac{A}{m}\right]\right)\hat{k}$$

ii. La magnetización $\overrightarrow{M}$ está dada por:

$$\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H} = \chi_m nI\hat{k} = \left(6.96 \left[\frac{A}{m}\right]\right)\hat{k}$$

iii. La magnitud de $\overrightarrow{B}$ es $\mu_r\mu_0$ veces la magnitud de $\overrightarrow{H}$. Aquí, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ y $\mu_r = 1 + \chi_m = 1.00029$. Utilizando el resultado de i., queda,

$$\mid \overrightarrow{B} \mid = 3.0168 \cdot 10^{-2}\ [T].$$

Si el solenoide estuviera vacío,

$$\mid \overrightarrow{B} \mid = \mu_0 \mid \overrightarrow{H} \mid = 3.0159 \cdot 10^{-2}\ [T]$$

iv. Si se sustituyese según el enunciado,

$$\mid \overrightarrow{B} \mid = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2.4 \cdot 10^4 \backsimeq 15\ [T].$$

b) Igual que en a), el campo $\overrightarrow{H}$ al interior del solenoide queda

$$\overrightarrow{H} = NI\hat{k}$$

Con I la corriente que circula por el solenoide, y N, el número de vueltas por unidad de longitud del enrollado. Como en el interior se ha puesto un núcleo de hierro dulce, la magnetización es

$$\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H}$$

(Como la curva de histéresis del hierro dulce es muy delgada, se suele asumir un comportamiento lineal entre $\overrightarrow{M}$ y $\overrightarrow{H}$ para éste tipo de material ferromagnético, al menos en un tramo suficientemente grande). Finalmente

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{M} + \overrightarrow{H}\right) = \mu_0 \mu_r \overrightarrow{H} = \mu_0 \mu_r NI\hat{k} = \mu_0 1200 \cdot 2000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \sim \Big(0.06\ [T]\Big)\, \hat{k}$$

Para un solenoide vacío,

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 NI\hat{k}$$

Para producir 0.06 $[T]$, se necesita entonces una corriente de

$$I = \frac{0.06}{\mu_0 N} \sim 23.9\ [A]$$

c)

i. Éste es un caso muy sencillo. En general se tiene que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{J} = \nabla \times \overrightarrow{M} & (1) \\ \overrightarrow{K} = \overrightarrow{M} \times \hat{n} & (2) \end{cases}$$

Donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie. Vemos que la expresión (1) resulta nula, en cambio la (2),

$$\overrightarrow{K} = \overrightarrow{M} \times \hat{n} = \left(aR^2 sen^2(\theta) cos^2(\phi) + b\right) \left(sen(\theta)\hat{k} - cos(\theta)\hat{j}\right)$$

Usando coordenadas esféricas, en que

$$x = Rsen(\theta)cos(\phi),$$

$$\hat{n} = \hat{r}\ y\ \hat{r} = cos\theta\hat{k} + sen\theta(cos\phi\hat{i} + sen\phi\hat{j}).$$

ii. Basta plantear la integral del potencial magnético vector en términos de lo recién calculado y resolver, suponiendo que el denominador puede salir de ella. De ahí, calculando el rotor de $\overrightarrow{A}$ se obtendrá el campo magnético $\overrightarrow{B}$.

Problema 2

a) En general, la definición de la inductancia mutua plantea que:

$$M = \frac{\phi_{12}}{I_2} = \frac{\phi_{21}}{I_1}$$

donde ϕ_{12} es el flujo de campo producido por el circuito 2 sobre el 1, y ϕ_{21}, análogo pero inverso. Dado que la bobina 2 es más ancha y corta que la 1, realizar ley de ampere con la suposición que el campo sólo apunta en su eje de simetría supone despreciar efectos de borde que son, en principio, no pequeños. (Ni necesariamente despreciables). Por lo anterior, trabajaremos con el flujo producido por el solenoide 1, dentro de la 2, i.e., con el lado derecho de la expresión. Así,

$$M = \frac{N}{I_1} \int_{Bobina\ 2} \overrightarrow{B}_1 \cdot d\overrightarrow{S}_2 = \frac{N}{I_1} \mu_0 n I_1 \pi a^2 = N a^2 n \pi \mu_0$$

b) El coeficiente de acomplamiento es,

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

De la definición para cada autoinductancia,

$$L_1 = \frac{\phi_1}{I_1} = \frac{nDB_1\pi a^2}{I_1} = \mu_0\pi a^2 n^2 D$$

$$L_2 = \frac{\mu_0\left(\frac{N}{d}\right) I_2\pi b^2 N}{I_2} = \frac{N^2\pi b^2}{d}\mu_0$$

Finalmente, (después de un depeje algebraico),

$$k = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{d}{D}}$$

Vemos que, si $a = b$ y $d = D$, i.e., cuando ambas bobinas se convierten en una sola, se cumple que $k = 1$, i.e., el acomplamiento es completo, lo que es coherente con el sistema. Si bien se utilizó aquí la ley de Ampére para obtener el campo dado por cada bobina, debe recalcarse que ésto es una aproximación, en especial para el caso de la bobina 2, y por lo tanto el coeficiente de acomplamiento aquí obtenido es una aproximación solamente. Dependiendo de los tamaños y las proporciones del sistema su validez puede aumentar o disminuir.

Problema 3

a) Para el cálculo en ésta parte no es útil la ley de Ampere pues la trayectoria cerrada utiliza trozos en los que no conocemos el valor del campo. Nuevamente la integral por definición es bastante compleja, y es preferible trabajar con el vector potencial vectorial y luego tomar rotor. Ésto último queda propuesto, puesto que usaremos en la solución la misma técnica que en el Problema 3 antes planteado. Calcularemos entonces el campo magnético sobre el eje de un anillo circular de radio R, y con él, dividiremos el solenoide en espiras y sumaremos todos los aportes. Nota: En rigor, el vector $\overrightarrow{H}$ se denota intensidad de campo magnético, y el vector $\overrightarrow{B}$, sólo campo magnético o inducción magnética. En éste caso, se calculará $\overrightarrow{H}$.

Según la figura 1,

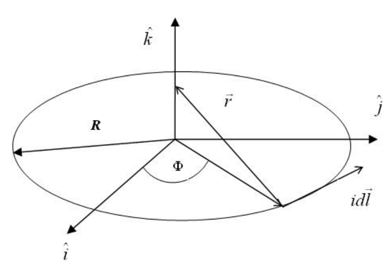

Figura 1

$$d\overrightarrow{H} = \frac{i}{4\pi}\frac{d\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{r}}{r^3}$$

Con:

$$\overrightarrow{r} = z\hat{k} - Rcos(\phi)\hat{i} - Rsen(\phi)\hat{j}$$

$$d\overrightarrow{l} = (-Rsen\phi\hat{i} + Rcos\phi\hat{j})d\phi$$

$$r^3 = \left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Entonces,

$$d\overrightarrow{H}(z)=\frac{i}{4\pi}\frac{zRcos\phi\hat{\imath}+zRsen\phi\hat{\jmath}+R^2\hat{k}}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}d\phi\Rightarrow\overrightarrow{H}(z)=\int_0^{2\pi}d\overrightarrow{H}(z)=\frac{iR^2\hat{k}}{2\,(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ésto resulta ser el vector intensidad magnética sobre el eje z, de un anillo circular de radio R, centrado en el origen y a altura $z=0$. Dividamos ahora el solenoide en espiras de espesor dz'. Sea m el número de vueltas por unidad de longitud, $m=\frac{N}{L}$. Entonces, en la espira de espesor dz' habrá mdz' vueltas, y la corriente total por ella será

$$i'=imdz'$$

El campo magnético entonces, (considerando que las espiras están en z'), queda:

$$d\overrightarrow{H}(z)=\frac{imdz'R^2\hat{k}}{2\left((z-z')^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

El campo magnético total, (producido por todo el solenoide), a la altura z, resulta:

$$\overrightarrow{H}(z)=\int_{z'=0}^{L}d\overrightarrow{H}(z)=\frac{NiR^2\hat{k}}{2L}\int_0^L\frac{dz'}{((z-z')^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{NiR^2\hat{k}}{2L}\left[\frac{-(z-z')}{R^2\sqrt{(z-z')^2+R^2}}\right]_0^L$$

$$\therefore\overrightarrow{H}(z)=\frac{Ni\hat{k}}{2L}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}-\frac{z-L}{\sqrt{(z-L)^2+R^2}}\right]$$

b) Ésta parte es bastante mecánica, aunque no por eso sencilla. Buscamos nuevamente $\overrightarrow{H}$, y para obtenerlo planteamos por definición y resolvemos. La ley de Ampere tampoco sirve aquí pues nuevamente, dada la dirección del campo, el camino necesario involucra campos de los que se desconoce su valor. Por ello, parametrizando, tendremos:

$$\overrightarrow{H}(z)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r}')\times(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}')}{\parallel\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\parallel^3}dV'$$

Con:

$$\overrightarrow{r}=z\hat{k},\ \overrightarrow{r}'=r'\hat{\rho}+z'\hat{k}=r'cos(\theta)\hat{\imath}+r'sen(\theta)\hat{\jmath}+z'\hat{k},\ \overrightarrow{J}(\overrightarrow{r}')=\rho r'w\hat{\theta}=\rho r'w(-sen(\theta)\hat{\imath}+cos(\theta)\hat{\jmath})$$

Así,

$$\overrightarrow{H}(z)=\frac{\rho w}{4\pi}\int_0^R\int_0^L\int_0^{2\pi}\frac{(z-z')r'cos(\theta)\hat{\imath}+(z-z')r'sen(\theta)\hat{\jmath}+r'^2\hat{k}}{[(z-z')^2+r'^2]^{\frac{3}{2}}}d\theta dz'r'dr'$$

$$=\frac{\rho w}{2}\hat{k}\int_0^R\int_0^L\frac{r'^3dz'dr'}{((z-z')^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Después de algo de trabajo con ésta integral, (primero integrando respecto de dz' y luego en dr'), se concluye que:

$$\overrightarrow{H}(z)=\frac{\rho w}{2}\left[z\sqrt{z^2+R^2}-z^2+(z-L)^2-(z-L)\sqrt{(z-L)^2+R^2}\right]$$