FI2002-3 2010B **Control 1** Prof: Simón Casassus

9 de Septiembre de 2010 3 h Ayudantes: Daniela Mancilla & Pablo Castellanos

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

Relaciones útiles:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L$, $\vec{D} = \epsilon\epsilon_\circ \vec{E}$, potencial dipolar: $\vec{p} \cdot \vec{r}/(4\pi\epsilon_\circ r^3)$.

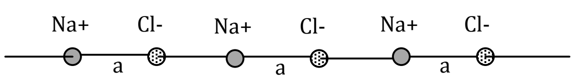
Coordenadas esfericas:

$\vec{\nabla}\Phi = (\frac{\partial \Phi}{r}, \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi})$, $\quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right]$,

$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}\right]$.

I Energía de disociación de la sal.

La cohesión en los cristales iónicos se debe a las fuerzas eléctricas de atracción entre los iones positivos y negativos. Considere un modelo unidimensional de un cristal de NaCl que consiste en una línea recta infinita en que están colocados los iones, alternándose los iones positivos de Na y los iones negativos de Cl. La distancia entre iones vecinos es a. Los iones positivos tienen carga +e y los iones negativos tienen carga −e. Calcule la energía que hay que entregarle a un ion positivo de Na para sacarlo de su lugar y llevarlo a una distancia muy grande respecto a a. Exprese su resultado en función de e y de a.



Ayuda: suponga que el potencial en infinito es 0. $\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6$ .....

II Campo eléctrico en el átomo de hidrógeno.

El átomo de hidrógeno, en su estado fundamental, tiene un núcleo de carga +e y un electrón de carga −e, que está distribuida en una densidad de carga simétrica esférica (centrada en el núcleo) dada por $\rho(\vec{r}) = A\exp(-2r/a_\circ)$, donde $a_\circ$ es una constante (llamada "radio de Bohr") y A se determina sabiendo que la carga total de esta distribución es −e.

Se pide encontrar el campo eléctrico producido por el núcleo más el electrón, en cualquier lugar del espacio. Exprese su resultado en función de e y de $a_\circ$.

Ayuda: $\int_0^x u^2 e^{pu} du = e^{px}\left(\frac{x}{p} - \frac{1}{p^2}\right)$.

III Esferas dieléctricas.

1. (6.0pt) Una esfera dieléctrica de radio a, con suceptibilidad $\chi_E = (\epsilon - 1)$, se encuentra inmersa en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E\hat{z}$.

    a) Si el campo interno a la esfera es uniforme, ¿Cuál es el potencial eléctrico en el interior?

    b) Modelamos la influencia de la esfera sobre su entorno como un dipolo con momento $p = VP$, en que V es el volumen de la esfera y $P = \chi_E \epsilon_0 E_{\text{int}}$ es la polarización inducida. Escriba el potencial eléctrico debido a este dipolo.

    c) Exija continuidad en la superficie de la esfera para encontrar el potencial Φ en todo el espacio.

    d) Confirme por el cálculo directo que la solución anterior satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2\Phi = 0$, y confirme que tiene el comportamiento asintótico correcto lejos de la esfera. Concluya usando el teorema de unicidad en electrostática - contabilice las ecuaciones impuestas entre θ y r por las condiciones de borde, y comparelas con las 4 constantes de integración de $\nabla^2\Phi = 0$ en θ y r ($\partial^2\Phi/\partial\phi^2 = 0$ por simetría).

    e) Confirme que la componente de $\vec{D}$ perpendicular a la superfie, $D_\perp$, y la componte de $\vec{E}$ paralela a la superfie, $E_\parallel$, son contínuas en la superficie de la esfera.

2. (+1.0pt) Consideramos ahora una cavidad esferica de radio a en un dieléctrico sometido al campo $\vec{E} = E\hat{z}$. Repita el tratamiento anterior para encontrar el potencial eléctrico en todo el espacio.