FI2002-2 2011B **Control 1** Prof: Simón Casassus

8 de Noviembre de 2011 3 h Ayudantes: Sebastian Derteano & Mauricio Morales

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

Relaciones útiles:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_\circ, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi,$

Coordenadas esfericas:

$\vec{\nabla}\Phi = (\frac{\partial \Phi}{r}, \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}), \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right],$

$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}\right].$

Coordenadas cilíndricas, $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

I Campo eléctrico debido a una distribución esférica de cargas.

Determine en todas partes el campo eléctrico que implica una distribución de cargas que, en coordenas esféricas, dependende tan solo de la coordenada r, y ella es:

$$\begin{aligned} \rho(r \leq a) &= \frac{Q}{13}\frac{r}{\pi a^4}, \\ \rho(a < r \leq 3a) &= \frac{Q}{26}\frac{3a - r}{\pi a^4}, \\ \rho(3a < r) &= 0. \end{aligned}$$

II Potencial dipolar eléctrico.

1. (`3pt`) Considere un dipolo compuesto por dos cargas q y $-q$ separadas por una distancia a. Orientamos el espacio con un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) tal que el eje del dipolo coincida con el eje z.

   a) Dé una expresión exacta para el potencial generado por este dipolo en un punto $\vec{r}$.

   b) Demuestre que si $r \gg a$ el potencial del dipolo se aproxima a

   $$\phi = \frac{qa\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_\circ r^2}, \text{a primer orden en } a/r.$$

2. (`3pt`) Consideramos ahora una distribución de cargas continua $\rho(\vec{r})$, acotada a un volumen $\mathcal{V}$. Rotulamos con $\vec{r}' \subset \mathcal{V}$ las variables de integración.

a) Escriba una expresión general para el potencial $\phi(\vec{r})$.

b) Demuestre que, a primer orden en r'/r,

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r'}\|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \ ...$$

c) Demuestre que, lejos de $\mathcal{V}$, $\phi(\vec{r})$ se aproxima a

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_\circ}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3},$$

Donde $Q = \int \rho(\vec{r}')\ d\mathcal{V}'$, carga total, y $\vec{p} = \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')d\mathcal{V}'$, momento dipolar total.

d) Discuta el resultado anterior.

3. (`+1pt`) Calcule el campo eléctrico debido al potencial dipolar.

III Condensador cilíndrico en el vacío.

Considere dos cilindros coaxiales con radios $a < b$, con diferencia de potencial $V = \phi(a) - \phi(b) > 0$. La carga total en el dispositivo es nula.

1. (`2pt`) Determine el campo eléctrico en el espacio entre las placas (i.e. $a < r < b$), suponiendo que la densidad de cargas en el conductor interior es σ_a y usando la ley de Gauss.

2. (`2pt`) Determine el potencial eléctrico entre las placas usando la ecuación de Laplace.

3. (`2pt`) Deduzca la capacidad C del condensador por unidad de largo ($Q = CV$).

4. (`+1pt`) ¿Cuál es la energía electrostática por unidad de largo en el condensador?