

# Electromagnetismo

2011

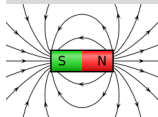
Simon Casassus Astronomía, Universidad de Chile

<http://www.das.uchile.cl/~simon>

- I Electrostática
- II Magnetostática
- III Inducción y ondas electromagnéticas.

# Parte I

## Magnétostática



### 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

#### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

#### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

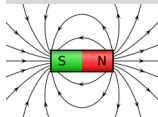
### 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

#### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

Cargas en movimiento cerca de corrientes eléctricas son sometidas a una fuerza adicional a la del campo eléctrica, y parametrizable en términos de un campo vectorial llamado “*campo magnético*”. En este capítulo estudiaremos el caso de corrientes estacionarias, i.e. la magnetostática.



#### Corriente eléctrica y ley de Ohm

- Corrientes y resistencias
- Ecuación de continuidad
- fem y efecto Joule

#### Campo magnético

- Fuerza de Lorentz y efecto Hall
- Dipolo magnético
- Ley de Biot-Savart y potencial vector
- Ley de Ampère

#### Materiales magnéticos

- Momentos magnéticos microscópicos
- Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.
- Magnetización
- Campo  $\vec{H}$
- Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad

fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

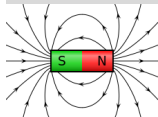
Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

#### Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad

fem y efecto Joule

#### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

#### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

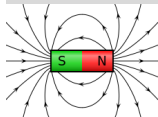
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 1.1-Intensidad de corriente



Para medir el flujo de carga eléctrica usamos la *densidad de corriente*

$$\vec{j} = nq\vec{v}, \text{ y la intensidad de corriente } I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Las unidades de  $I$  son Ampère,  $A = C s^{-1}$ , y las de  $\vec{j}$  son  $A m^{-2}$ .

### Corriente eléctrica y ley de Ohm

#### Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

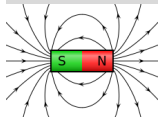
Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## 1.1-Ley de Ohm

- Consideremos un cable de largo  $l$ , y con una diferencia de potencial eléctrico  $V$  entre sus extremos:  $V = \Delta\phi = El$ . En ausencia de  $\vec{E}$  no hay corrientes  $\Rightarrow$  a primer orden  $\vec{j} \propto \vec{E}$ , si  $\|\vec{E}\|$  es suficientemente “pequeño”.
- Ponemos  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .
- El movimiento de los electrones es libre bajo la influencia de  $\vec{E}$ , pero se ve obstaculizado por choques con defectos o impurezas en el conductor.
- Entre cada choque que sufran los e-, son acelerados por  $\vec{E}$ , i.e. con  $m\dot{v} = qE \Rightarrow v = qEt/m + v(0)$ .
- Para calcular la conductividad  $\sigma$  aplicamos teoría cinética a un gas ideal de e-. El tiempo entre colisiones  $\tau = l/v_T$ , en que  $l$  es el libre camino medio entre impurezas  $l = 1/(n_i A_i)$ , y  $v_T = \sqrt{3kT/m}$  es la velocidad termal.
- En promedio  $v(0) = 0$ ,  $v = \frac{qE}{m}\tau$ , y como  $\vec{j} = nq\vec{v}$ ,  
 $j = nq^2 \frac{E}{m} \tau \Rightarrow \sigma = nq^2 \tau / m = nq^2 / \left( n_i A_i \sqrt{3mkT} \right)$ .



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

#### Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

#### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

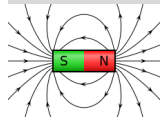
#### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 1.1-Valores típicos de conductividad

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

material	cobre	H <sub>2</sub> O+NaCl	vidrio	madera
$\sigma/\text{Ohm m}^{-1}$	$5,9 \cdot 10^7$	23	$10^{-10}$	$10^{-11}$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

#### Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

#### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

#### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

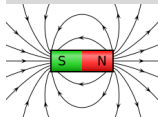
Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## 1.1-Resistencia

Con  $E = V/l$ , y  $I = A\sigma E = \sigma AV/l$ , tenemos

$$j = \sigma E,$$

$$V = RI \text{ con } R = \frac{l}{\sigma A}.$$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

#### Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

#### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

#### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo



# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

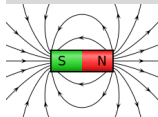
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad

fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

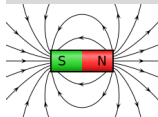
## 1.2-Ecuación de continuidad

Consideremos la variación temporal de la carga  $Q$  encerrada en un volumen  $\mathcal{V}$ :

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}.$$

Por conservación de carga, la variación de  $Q(t)$  es igual al flujo de cargas por la superficie  $\mathcal{S}$  que encierra al volumen  $\mathcal{V}$ :

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}, \\ \Leftrightarrow \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} &= - \int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\mathcal{V}, \text{ para cualquier } \mathcal{V}, \\ &\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}.\end{aligned}$$



Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad

fem y efecto Joule

Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

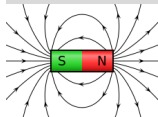
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

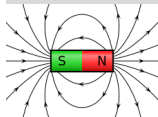
Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 1.3- Fuerza electromotriz

- Vimos en electrostática que en un conductor  $\vec{E} = 0 \Rightarrow \phi = Cte \Rightarrow V = 0$ . Luego, para establecer una corriente en un cable conductor es necesario mantener los extremos del cable a una diferencia de potencial  $V \neq 0$  usando una *batería*, o una “fem”  $V$ .
- La batería transforma energía potencial química en energía potencial eléctrica (tal como la que se acumula en un condensador).
- Ejemplo: ver la batería descrita en Feynman II, 22-2, p22-7.



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad

fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

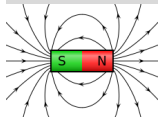
Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 1.3-Potencia disipada

- Dados  $V$  en un cable de largo  $l$ ,  $\vec{E} = \text{Cte} = \vec{j}/\sigma$ , o sea la  $\langle v \rangle$  de los  $e^-$  es Cte.
- Dado que  $\langle v \rangle$  es Cte, los  $e^-$  no son acelerados en promedio, y la energía potencial correspondiente a la caída de potencial, que debiera convertirse en un incremento de energía cinética, se disipa en calor a través de la fricción de los  $e^-$  con los defectos o impurezas en el conductor.
- $dU = Vdq \Rightarrow P = V \frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{P = VI = RI^2}$ .



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias

Ecuación de continuidad

fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

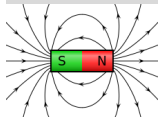
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

#### Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 2.1-Fuerza de Lorentz

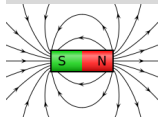
- Una carga en movimiento cerca de otras cargas en movimientos es afectada por un campo adicional al campo eléctrico, parametrizable en términos de otro campo vectorial, llamado campo magnética  $\vec{B}$ . Este efecto radica en la transformación relativista de los campos eléctricos de las cargas involucradas desde un sistema de inercia a otro. Para más detalles, revisar Feynman II.
- La fuerza neta percibida por una carga  $q$  se llama la fuerza de Lorentz, y escribe

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

- Las unidades de  $B$  son

$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{C m s}^{-1}} = \text{T} = 10^4 \text{G},$$

en que el Tesla se usa en MKS, mientras que el Gauss se usa en CGS.



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

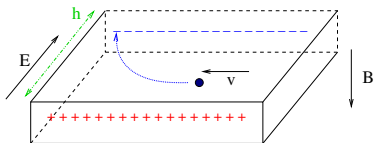
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 2.1-Efecto Hall

Para medir  $\vec{B}$  podemos usar por ejemplo el efecto Hall.



Si  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , el movimiento de la carga en azul (un electrón) es circular uniforme con radio de Larmor  $r_L = v/\omega_L$ ,

$$\omega_L = \frac{eB}{2m} = v/r_L \text{ (tarea).}$$

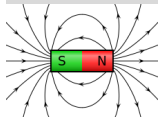
Si  $h \ll r_L$ , en una situación estacionaria

$$-e\vec{E} = e\vec{v} \wedge \vec{B}, \text{ con } E = V/h, \Rightarrow V = vBh,$$

$$\text{y como } I = nevA, \text{ con } A \text{ sección del conductor, } V = \frac{IhB}{neA}.$$

AN:  $B \sim 1$  T, barra de cobre de  $0,5 \times 0,1$  cm,  $I = 1$  A, y 1 e-libre por átomo de cobre  $\Rightarrow V \sim 10^{-7}$  V. Es más conveniente usar semiconductores<sup>1</sup>, con  $n$  chico ( $\ll 1$  e-libre por átomo).

<sup>1</sup>conduce en una sola dirección



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

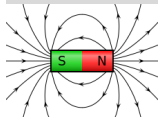


## 2.1-Ausencia de carga magnética

Podemos medir las líneas de  $\vec{B}$  usando, por ejemplo, el efecto Hall. Se encuentra que son cerradas: no tienen origen ni fin. Para un volumen cualquiera, igual tantas líneas entran y salen de  $\mathcal{V}$ , de manera que

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} .$$

Por analogía con  $\vec{E}$  vemos que no existen cargas magnéticas.



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

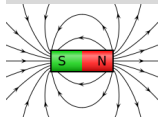
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

### Dipolo magnético

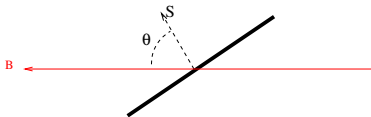
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 2.2- Torque sobre un dipolo magnético

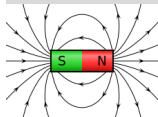
Consideremos un circuito eléctrico rectangular, con brazos verticales de largo  $L_1$ , brazos horizontales  $L_2$ , y sección  $A$ , por el cual pasa una corriente  $I$ , y que es permeado por un campo magnético  $\vec{B}$ , como se indica en la Fig., en una proyección de planta.



El torque debido a la resultante de la fuerza de Lorentz que actúa sobre los electrones es

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2 \frac{L_2}{2} (nL_1 A) q |\vec{v} \times \vec{B}| \sin(\theta) = L_2 L_1 I B \sin(\theta) \\ &= I S B \sin(\theta), \text{ o sea } \vec{\Gamma} = I \vec{S} \times \vec{B}.\end{aligned}$$

Definimos el *momento dipolar magnético*  $\vec{m} = I \vec{S}$ , de manera que  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$ .



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

### Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

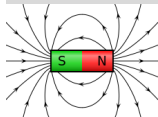
Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 2.2- Energía del dipolo magnético

Existe una energía potencial magnética asociada al torque. Análogamente a  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ , si orientamos la coordenada  $s$  según  $\vec{F}$  entonces  $F \sim -\partial U/\partial s$ . En caso de la aplicación de torque a un cuerpo rígido,  $r$  mide la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza  $F$  y el eje de rotación, o sea  $r$  es la 'palanca'. Si  $\theta$  es el ángulo de rotación tenemos  $\partial s = r\partial\theta$ , y  $\Gamma = rF$ , de manera que  $\Gamma \sim -\partial U/\partial\theta$ . Entonces

$$U = -ISB \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{U = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

La forma de esta energía magnética es muy similar a la del dipolo eléctrico ( $-\vec{p} \cdot \vec{E}$ ), lo cual motiva el uso de las palabras 'momento dipolar magnético', por analogía con el momento dipolar eléctrico.



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

### Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

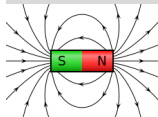
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 2.3-Ley de Bio-Savart

El campo  $\vec{B}$  producido por una carga  $q'$  con velocidad  $\vec{v}'$  es

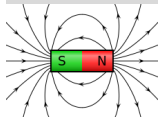
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q' \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \text{ con } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}.$$

Entonces un elemento de circuito con intensidad  $I = nAq'v'$  y largo  $d\vec{l}$  produce un campo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q' n A v' d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

y para un circuito cerrado,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético

### Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 2.3- Potencial vector

Pasemos al continuo:

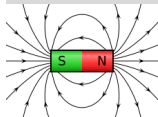
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q' \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rightarrow d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$
$$q' \rightarrow \rho dV', \text{ con } \vec{j}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}'.$$

Notamos que  $(\vec{r} - \vec{r}') / |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = -\vec{\nabla} (1 / |\vec{r} - \vec{r}'|)$ , y

$$d\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV',$$

$$\text{entonces } \vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}, \text{ con } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$



Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Dipolo magnético

Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Ampère

Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## 2.3- Potencial vector y ausencia de cargas magnéticas

Como  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , hay un cierto grado de libertad en la definición de  $\vec{A}$ , llamado “libertad de Gauge”. Si le agregamos un vector constante,  $\vec{B}$  queda invariante. Además, como  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}) = 0$  para cualquier  $\Lambda$ , también queda invariante  $\vec{B}$  al agregar  $\vec{\nabla} \Lambda$ .

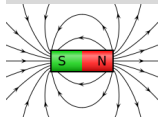
La forma más general posible de  $\vec{A}$  es entonces

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|} \right\} \vec{j}(\vec{r}') dV' + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}).$$

Notamos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0,$$

es decir la ausencia de cargas magnéticas es consecuencia de Biot-Savart.



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

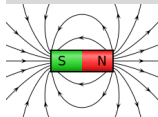
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

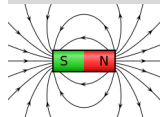
### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 2.4-Ley de Ampère

Otra consecuencia de la ley de Biot-Savart es la ley de Ampère: en regimen estacionario,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) .$$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector

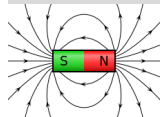
### Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

# Ejemplos: calculos de $\vec{B}$ usando Ley de Ampère

- Alambre infinito
- Solenoide



## Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector

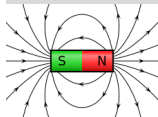
## Ley de Ampère

## Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 3-Materiales magnéticos

- Materia = átomos, con e- en movimientos orbitales  $\approx$  corrientes microscópicas, y con “espines”  $\approx$  dipolos magnéticos microscópicos  $\vec{\mu}$ .
- ¿Cuál es la interacción entre la asamblea de corrientes  $\vec{\mu}$  con un campo externo?
- ¿Qué se puede inferir de la estructura de la materia en base a su interacción magnética?



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

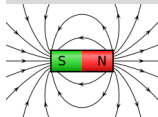
### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 3-Materiales magnéticos

Veremos existen 3 tipos de propiedades magnéticas:

- Materiales diamagnéticos: no poseen dipolos magnéticos  $\vec{\mu}$  permanentes. Su acoplamiento con  $\vec{B}$  es débil. Ejemplos: vidrio o cobre.
- Materiales paramagnéticos: tienen dipolos magnéticos  $\vec{\mu}$  permanentes. Su acoplamiento con  $\vec{B}$  es más fuerte que en el diamagnetismo. Ejemplos: oxígeno, titanio.
- Materiales ferromagnéticos: tienen dipolos permanentes con comportamiento colectivo ordenado. Su acoplamiento con  $\vec{B}$  es el más fuerte. Ejemplos: Fe, Co, Ni.



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

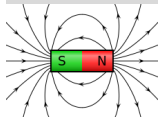
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

#### Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

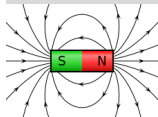
Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## 3.1-Momentos magnéticos microscópicos

- Vimos que para corrientes macroscópicas cerradas,  
$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B},$$
$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B},$$
con  $\vec{m} = I\vec{S}$  momento dipolar magnético.
- Para entender las propiedades magnéticas de la materia estudiaremos el origen de los dipolos microscópicos.



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

#### Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

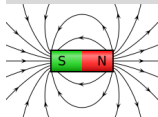
## Corrientes microscópicas: movimientos orbitales

- En el átomo de Bohr los e- tienen órbitas circulares, con velocidad  $v$ .
- La intensidad de corriente en este circuito es  $-e \frac{v}{2\pi r}$ .
- El dipolo microscópico  $\vec{\mu}$  correspondiente a esta corriente es

$$\mu = -e \frac{v}{2\pi r} \pi r^2 = -\frac{e}{2} \frac{mvr}{m} \Rightarrow \boxed{\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L}},$$

en que  $\vec{L}$  es el momentum angular orbital.

- Resulta de mecánica cuántica que  $L_z = n\hbar$ , con  $\hbar = \frac{1}{2\pi} 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ .



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

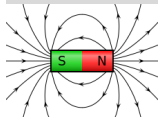


## Corrientes microscópicas: espines

- Protones, neutrones y electrones giran en torno a un eje propio. A esta rotación se le llama *spin*, como la Tierra tiene *spin*.
- El momento magnético asociado es

$$\vec{\mu} = 2,002319 \frac{q}{2m} \vec{S}, \text{ con } S_z = \frac{n\hbar}{2}.$$

- Notar que si bien el neutrón no tiene carga neta, si tiene  $\vec{\mu}$  ( $\sim$  como si tuviese una carga negativa).



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

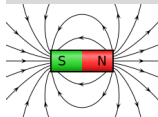
# Corrientes microscópicas: factor de Landé

En general ponemos

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2m} \vec{L},$$

en que  $g$  es el factor de Landé:

- $g = 1$  para mov. orbital
- $g \approx 2$  para spin.



## Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## Materiales magnéticos

### Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

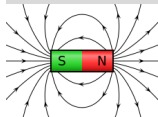
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## 3.2-Campo $\vec{B}$ producido por un dipolo.

- Para modelar las propiedades magnéticas de la materia es necesario calcular el campo  $\vec{B}$  producido por los dipolos microscópicos. Trabajamos con un dipolo magnético macroscópico.

- Para un circuito finito, tomamos la referencia de  $\vec{A}$  en  $\infty$ :

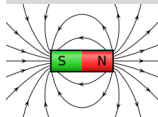
$$\vec{A}(\vec{r}_o) = 0 \text{ si } \|\vec{r}_o\| \rightarrow \infty,$$

y si usamos el *gauge*  $\vec{\nabla} \Lambda = 0$ ,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

- Demostraremos que el campo  $\vec{A}$  producido por un dipolo  $\vec{m}$  en el origen de coordenadas es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

### Campo $\vec{B}$ producido por un dipolo.

Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## Cálculo de $\vec{A}$ para un dipolo

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

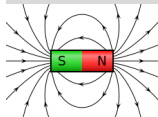
Para un circuito  $dV' = S dl'$ , en que  $S$  es la sección del circuito y  $dl' = \|d\vec{r}'\|$ .

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ con } I = jS.$$

Colocamos el 'circuito' cerca del origen, de manera que  $\|\vec{r}'\| \ll \|\vec{r}\|$ , es decir consideramos un circuito infinitesimal o bien tomamos  $r \rightarrow \infty$ . Entonces,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \right) \quad (\text{tarea}).$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} d\vec{r}'.$$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

### Campo $\vec{B}$ producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

Para seguir usamos que (ver demo en clase):

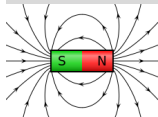
$$\int (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{r}' = \frac{1}{2} \int (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r}, \text{ entonces,}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} d\vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{1}{2} (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \frac{\vec{r}}{r^3}.$$
$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Para un circuito cerrado circular,

$$m = \frac{I}{2} \int_0^{2\pi} r' r' d\theta = \pi (r')^2 I,$$

consistente con la definición anterior de  $\vec{m}$ .



#### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

#### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

#### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos  
microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## Cálculo de $\vec{B}$ para un dipolo

Si el dipolo  $\vec{m}$  está en  $\vec{r}' \neq 0$ ,

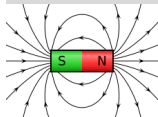
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Ahora calculamos  $\vec{B}$  con

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right).$$

Es directo demostrar que para un dipolo  $\vec{B}$  también se puede expresar en términos de un gradiente:

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}, \quad \text{con } \phi_{\text{dip}} = \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos

Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

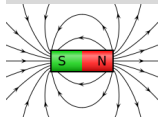
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

### Magnetización

Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo



### 3.3-Magnetización

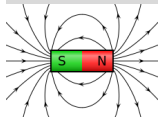
En un continuo de dipolos microscópicos, el momento dipolar magnético asociado a un elemento de volumen  $dV'$  centrado en  $\vec{r}'$  es

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}') dV',$$

en que  $\vec{M}$  es la magnetización.

Calculamos el campo  $\vec{A}$  producido por  $\vec{M}$ :

$$\begin{aligned}\vec{A}_M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') dV' \times \vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M} \times \vec{\nabla}' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\end{aligned}$$



#### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

#### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

#### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

#### Magnetización

Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## Corrientes de magnetización

Reescribimos la última expresión,

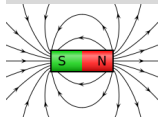
$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

introduciendo una densidad de corriente  $\vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$  y una densidad de corriente superficial  $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{S}'$  que dan origen al primer y segundo término en  $\vec{A}$ :

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_M(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}_M}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS'.$$

Vemos que el campo  $\vec{A}$  producido por material con magnetización  $\vec{M}$  es el debido a unas “corrientes de magnetización”  $\vec{j}_M$  y  $\vec{K}_M$ .

⇒ magnetización ⇔ corrientes microscópicas



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

### Magnetización

Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

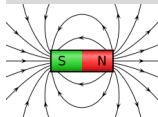
## Campo magnético de magnetización

Para calcular  $\vec{B}_M$  correspondiente a  $\vec{A}_M$  volvemos a  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , con

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left[ \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] dV'$$

Se demuestra que

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M} - \mu_0 \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}, \text{ con } \phi_{\text{dip}} = \int \vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

### Magnetización

Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

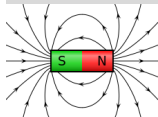
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.

Magnetización

Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## 3.4-Campo $\vec{H}$

En presencia de corrientes macroscópicas (i.e. corrientes de conducción),

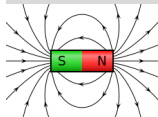
$$\vec{B} = \vec{B}_M + \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_l(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV',$$

en que  $\vec{B}_M = \mu_o \vec{M} - \mu_o \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}$  es la contribución a  $\vec{B}$  debida a las corrientes microscópicas.  $\vec{B}$  se suele escribir

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}), \quad \text{donde}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_l \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' - \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}.$$

$\vec{H}$  se llama campo de intensidad magnética.



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## Campo $\vec{H}$ y ley de Ampère.

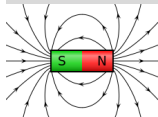
Volvamos a la ley de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T, \text{ en que } \vec{j}_T = \vec{j}_I + \vec{j}_M, \text{ con } \vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}.$$

Hemos particularizado al caso en que no hay corrientes de superficies, i.e. no hay discontinuidades o bordes. Veremos el caso de condiciones de borde en magnetostática más adelante.

$$\text{Sustitución de } \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \text{ da } \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_I}.$$

Se justifica entonces que  $\vec{H}$  es la variable básica en presencia de materiales con magnetización, ya que el experimentador sólo controla a  $\vec{j}_I$  y no a  $\vec{j}_M$ .



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización

### Campo $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

# Outline

## 1 Corriente eléctrica y ley de Ohm

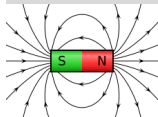
Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## 2 Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## 3 Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$   
Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

## 3.5-Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

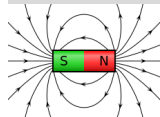
En general resulta que en “materiales lineales” y isotrópicos,

$$\vec{M}(\vec{r}) \approx \frac{\chi_B}{\mu_B} \vec{H}(\vec{r}).$$

Vimos que la materia contiene dipolos microscópicos, con momentos del tipo

$$\vec{m} = \frac{-e}{2m} \sum_i \vec{L}_i,$$

más la contribución de spin.



Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo



## Diamagnetismo

Para materiales diamagnéticos,  $\vec{m} = 0$ , i.e. no hay dipolos magnéticos microscópicos permanentes. Este es el caso de gases nobles, con capas electrónicas llenas. Pero si aplicamos  $\vec{B}$  aparece un momento inducido - para verlo consideremos el modelo de Bohr. La ecuación de movimiento del electrón es

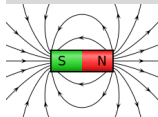
$$m\omega_0^2 r = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 m r^3}}$$

Si aplicamos  $\vec{B}$  perpendicular al circuito, en dirección positiva hay una fuerza adicional en dirección al núcleo:

$$m\omega^2 r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + e\omega r B,$$

si el electrón permanece en una órbita circular (se resuelve ecuación cuadrática en  $\omega$ ).

$$\Rightarrow \omega \approx \omega_0 + \overbrace{\frac{eB}{2m}}^{\omega_L}$$



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

Entonces tenemos que si  $\vec{B}$  apunta en dirección de  $\vec{L}$ ,  $\omega \approx \omega_o + \omega_L$ , mientras que si  $\vec{B}$  apunta en dirección contraria a  $\vec{L}$ ,  $\omega \approx \omega_o - \omega_L$ . En ambos casos el efecto de  $\vec{B}$  es agregar momentum angular a  $\vec{L}$  en dirección de  $\vec{B}$ .

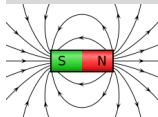
$$\Rightarrow |m_{\text{inducido}}| = \frac{e}{2m} (m_e \omega_L r^2) = \frac{e^2 r^2}{4m} \|\vec{B}\|.$$

Un cálculo más preciso, promediando sobre los radios orbitales de  $Z e^-$ , da

$$\vec{m}_{\text{inducido}} = -\frac{e^2}{6m} Z r_o^2 \vec{B}, \text{ en que } r_o^2 = \langle r^2 \rangle.$$

La magnetización es entonces

$$\vec{M} = - \underbrace{(N e^2 Z r_o^2 / (6 m_e))}_{\chi_B / \mu_o < 0} \vec{B}.$$



#### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

#### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

#### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## Paramagnetismo

En el caso de materiales magnéticos con momento dipolar permanente seguimos un tratamiento estadístico,

$$\vec{M} = \frac{Nm^2}{3kT} \vec{B}.$$

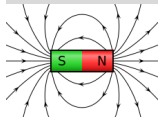
Tomando en cuenta el efecto diamagnético,

$$\vec{M} = N \left\{ \frac{m^2}{3kT} - \frac{e^2 Z r_o^2}{6m_e} \right\} \vec{B} = \frac{\chi_B}{\mu_o} \vec{B}.$$

Como  $\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$ ,

$$\vec{B} - \chi_B \vec{B} = \mu_o \vec{H} \Leftrightarrow \vec{B} = \mu \mu_o \vec{H}, \text{ con } \mu = 1/(1 - \chi_B).$$

Notar que existen distintas definiciones de  $\chi_B$  y  $\mu$  en los textos. También se puede ver que una medición experimental de  $\mu$  permite estimar  $r_o$ .



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

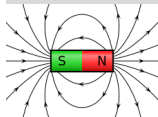
### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

# Ferromagnetismo

Es parecido al paramagnetismo, pero hay un fenómeno de interacción colectiva que ordena los dipolos permanentes. Para materiales ferromagnéticos,  $\mu \sim 1000$ .



## Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

## Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

## Materiales magnéticos

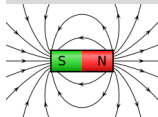
Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo

## Condiciones de borde

Las condiciones de continuidad de  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  en una discontinuidad plana entre dos medio materiales con permitividades  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son las siguientes.  $\perp$  y  $\parallel$  se refieren al plano de la discontinuidad. En ausencia de corrientes libres,

- $B_{\perp}$  es continuo. Deriva de  $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0$ .
- $H_{\parallel}$  es continuo. Deriva de  $\int \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int \vec{j}_l \cdot d\vec{S} = 0$ .



### Corriente eléctrica y ley de Ohm

Corrientes y resistencias  
Ecuación de continuidad  
fem y efecto Joule

### Campo magnético

Fuerza de Lorentz y efecto Hall  
Dipolo magnético  
Ley de Biot-Savart y potencial vector  
Ley de Ampère

### Materiales magnéticos

Momentos magnéticos microscópicos  
Campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo.  
Magnetización  
Campo  $\vec{H}$

Diamagnetismo,  
Paramagnetismo,  
ferromagnetismo