

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora. )

## Relaciones útiles:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L, \quad \vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0\vec{E}, \quad \vec{P}/n = \vec{p} = \alpha\epsilon_0\vec{E}.$$

Coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \left[ \frac{\partial A_\theta \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \right],$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \right].$$

## I Polarizabilidad del átomo de hidrógeno.

En este problema estimaremos la permitividad relativa  $\epsilon$  del átomo de hidrógeno.

- (3pt) En ausencia de un campo externo, la nube electrónica tiene densidad de carga

$$\rho_e(r) = \frac{q}{\pi a^3} \exp(-2r/a), \text{ donde } a \text{ es el radio de Bohr, y } q = -e.$$

Determine el campo eléctrico  $E_e$  debido a la nube electrónica.

- (2pt) Aplicamos ahora un campo externo  $E_0$ . En primera aproximación supondremos que la forma de la nube electrónica no cambia, y que el desplazamiento  $\vec{d}$  de su baricentro relativo al núcleo tiene norma  $d \ll a$ . Calcule  $d$ .
- (1pt) Calcule el dipolo eléctrico atómico  $\vec{p}$ , la polarizabilidad atómica  $\alpha$ , y la permitividad relativa  $\epsilon$ .

## II Potencial dipolar eléctrico.

1. (2.5pt) Considere un dipolo compuesto por dos cargas  $q$  y  $-q$  separadas por una distancia  $a$ . Orientamos el espacio con un sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  tal que el eje del dipolo coincida con el eje  $z$ . Demuestre que si  $r \gg a$  el potencial del dipolo se aproxima a

$$\phi = \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ a primer orden en } a/r.$$

2. (2.5pt) Consideramos ahora una distribución de cargas continua  $\rho(\vec{r})$ , acotada a un volumen  $\mathcal{V}$ . Rotulamos con  $\vec{r}' \subset \mathcal{V}$  las variables de integración.

- a) Escriba una expresión general para el potencial  $\phi(\vec{r})$  .  
 b) Demuestre que, a primer orden en  $r'/r$ ,

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$$

c) Demuestre que, lejos de  $\mathcal{V}$ ,  $\phi(\vec{r})$  se aproxima a

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

Donde  $Q = \int \rho(\vec{r}') d\mathcal{V}'$ , carga total, y  $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\mathcal{V}'$ , momento dipolar total.

d) Discuta el resultado anterior.

3. (1pt) Calcule el campo eléctrico debido al potencial dipolar.

### III Fuerza electrostática neta en un dieléctrico.

Consideramos un condensador con placas paralelas cuadradas, cuya área común es  $A = a^2$ , y con separación  $d$ . Centramos las placas en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , en que las placas son paralelas a  $(x, y)$ , y llenamos la mitad del volumen entre las placas, en  $x < 0$ , con un dieléctrico que tiene permitividad  $\epsilon_1 = 2$ . En el volumen entre las placas con  $x > 0$  colocamos un segundo dieléctrico con permitividad  $\epsilon_2 = 4$ , que se puede desplazar como cuerpo rígido en dirección  $x$ . Luego desplazamos el dieléctrico 2 de manera que el vacío entre los dieléctricos tiene ancho  $x$ . Mantenemos una diferencia de potencial  $V$  entre las placas.

1. (3pt) La densidad de energía electrostática en un dieléctrico es  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ . Calcule la energía almacenada en el condensador en función de  $x$ . Desarrolle su respuesta y destaque **todas** las aproximaciones que use.

2. (3pt) Calcule la fuerza  $\vec{F}$  sobre el dieléctrico 2.

