FI2002-4 2012A **Examen** Prof: Simón Casassus
9 de Julio de 2012 3 h Ayudantes: Diego Valenzuela & Camilo Ulloa

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

Relaciones útiles:

$\vec{D} = \epsilon\epsilon_\circ \vec{E}$, $\vec{B} = \mu\mu_\circ H$, $\mu_\circ = 4\pi\ 10^{-7}$ T m A^{-1}, $\epsilon_\circ = 8{,}85\ 10^{-12}$ F m^{-1}
Energía dípolo magnético: $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
Densidad de energía electromagnética: $u = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j_l} + (\partial \vec{D}/\partial t) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$
$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$.

I Fuerza entre dipolos magnéticos.

Calcular la fuerza entre dos dipolos magnéticos $\vec{m}$, idénticos y paralelos, y con direcciones ortogonales a su separación, dado el campo magnético de un dipolo en $\vec{r}'$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_\circ \vec{\nabla}\phi_{\rm dip}, \text{ con } \phi_{\rm dip} = \frac{\vec{m}}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Compare esta fuerza con la repulsión electrostática de dos electrones separados por 1 Å, si ambos espines están orientados paralelamente y son ortogonales al vector separación (dato: momento magnético del electrón, 9,274 10 $^{-24}$ J T^{-1}). Haga sus estimaciones sin calculadores (sólo se pide un resultado aproximado).

II Ondas electromagnéticas.

Este problema tiene ponderación doble y consiste en dos partes.

1. Generalidades en ondas planas monocromáticas (OPMs).

   Lejos de su fuente de emisión, una señal electromagnética arbitraria se puede descomponer como una suma contínua de OPMs. Recordamos primero resultados generales sobre las OPMs.

   a) `(1.5pt)` Obtenga la ecuación de ondas partiendo de las ecuaciones de Maxwell, y deduzca la velocidad de propagación c en un medio con constantes ϵ y μ.

   b) `(1.0pt)` Escriba una expresión general para el campo $\vec{E}$ de una OPM, en notación compleja, que viaje en dirección $\hat{z}$ y con número de onda k y frecuencia angular ω. Verifique que satisface la ecuación de ondas.

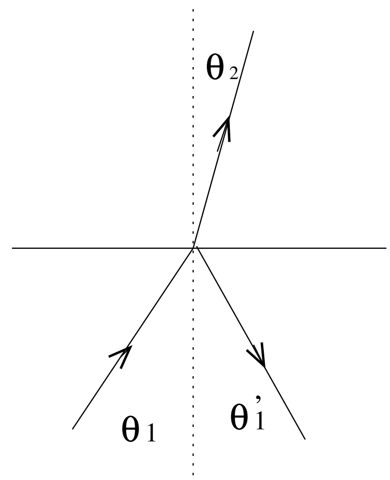
c) `(1.0pt)` Siguiendo con la notación anterior, dé ejemplos de OPMs con polarización lineal y circular.

d) `(1.0pt)` Demuestre que para una onda plana monocromática $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E}/c$, en que $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda.

e) `(1.5pt)` Relacione el vector de Poynting de una OPM con la densidad de energía electromagnética, e interprete su significado físico.

2. Transmisión de ondas electromagnéticas en dieléctricos.

En este problema consideramos la transmisión de una onda electromagnética en la interfaz (en el plano $z = 0$) entre dos medios con constantes diélectricas distintas ϵ_1 y ϵ_2, como se indica en la figura.



a) `(1.0pt)` Una onda plana monocromática incide en la interfaz entre dos dieléctricos. Distinguimos la onda incidente, con vector de onda $\vec{k_1}$ de la ondas reflejada, $\vec{k_1}'$, y transmitida, $\vec{k_2}$. Demuestre, a partir de las ecuaciones de Maxwell, que las condiciones de continuidad en la interfaz, en ausencia de cargas y corrientes libres, son $E_\parallel$ y $B_\perp$ continuos.

b) `(1.0pt)` Escriba las condiciones de continuidad para el caso en que la onda incidente es una onda plana monocromática (ayuda: si $\hat{n}$ es la normal a la interfaz, las componentes perpendiculares y paralelas estan dadas por $\hat{n}\cdot$ y $\hat{n}\times$, respectivamente).

c) `(1.0pt)` Exiga que se cumplan las condiciones de continuidad en todo los puntos de la interfaz para deducir las leyes de Snell: $n_1 \operatorname{sen}(\theta_1) = n_e \operatorname{sen}(\theta_2)$. Identifique n_1 y n_2.

d) `(1.0pt)` Calcule las amplitudes $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_1'$ para los casos en que $\vec{E}_1$ es paralelo y perpendicular a $z = 0$.

e) `(1.0pt)` Muestre que existe un ángulo θ_1^B, llamado 'ángulo de Brewster', tal que $\tan\theta_1^B = n_2/n_1$, para el cual la amplitud E_1' se anula en el caso $\vec{E}_1$ paralelo a $z = 0$.

f) `(1.0pt)` Demuestre que una onda plana monocromática, de polarización elíptica arbitraria, se puede descomponer como la suma vectorial de dos ondas polarizadas linealmente. Si hacemos incidar luz natural sobre la interfaz, con $\theta_1 = \theta_1^B$, ¿Cuál será la fracción y el modo de polarización de la onda reflejada?.