

Parte I

Electrostática

Índice

| | | |
|-----------|---|----------|
| I | Electrostática | 1 |
| 1. | Fuerza electrostática | 1 |
| 1.1. | Carga eléctrica | 1 |
| 1.2. | Campo eléctrico | 2 |
| 1.3. | Ley de Gauss | 2 |
| 2. | Energía electrostática | 4 |
| 2.1. | Potencial eléctrico | 4 |
| 2.2. | Potencial de N cargas y límite continuo. | 4 |
| 2.3. | Líneas de campo y superficies equipotenciales | 5 |
| 2.4. | Potencial del dipolo eléctrico | 6 |
| 2.5. | Teorema de unicidad | 7 |
| 2.6. | Energía electrostática asociada a la materia sólida | 7 |
| 3. | Dieléctricos | 8 |
| 3.1. | Polarización | 9 |
| 3.2. | Desplazamiento eléctrico | 11 |
| 3.3. | Condiciones de borde en electrostática | 12 |

1. Fuerza electrostática

1.1. Carga eléctrica

En el sistema MKS de unidades (i.e. el Sistema Internacional, S.I.),

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12},$$

con q_1 y q_2 en Coulombs (C), y $\epsilon_0 = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \text{ C N m}^{-2}$. Para un conjunto de N cargas, la fuerza resultante sobre la partícula j es:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij},$$

en que $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$.

1.2. Campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}/q,$$

en que q es una carga de prueba ubicada en \vec{r} . \vec{E} tiene unidades de V m^{-1} (Volt / metros), o N C^{-1} (o sea $\text{V} = \text{J} / \text{C}$). Para N cargas,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}_i) / \|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3.$$

Notar que \vec{E} es la suma de los campos de cada carga por separado. Esto es el *teorema de superposición*.

.4

Densidad de cargas

En el límite continuo, la carga Q encerrada en un volumen \mathcal{V} es

$$Q = \int_{\mathcal{V}} \rho d^3x,$$

en que $\rho(\vec{r})$ es la densidad de carga eléctrica.

.5

Campo eléctrico

En el continuo,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{todo el espacio}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\vec{r}') d^3x'$$

.6

Conductores

En un conductor existen electrones de conducción, libres de moverse en presencia de \vec{E} . En una situación estática, $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$.

.7

Densidad de carga superficial

En conductores los electrones libres tenderán a acumularse en las bordes (i.e. las superficies), y es conveniente introducir la densidad superficial de cargas σ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{superficie}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \sigma(\vec{r}') d^2x'$$

.8

1.3. Ley de Gauss

Flujo de un campo vectorial

El flujo de un campo \vec{E} a través de una superficie S es

$$\mathcal{F} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

.9

Angulo sólido

Consideremos una carga puntual q encerrada por una superficie \mathcal{S} . En un sistema de coordenadas esféricas centrado en q ,

$$d\vec{S} \cdot \hat{r} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \equiv r^2 d\Omega,$$

en que Ω es un *ángulo sólido*.

.10

Flujo del campo eléctrico por una superficie cerrada

El flujo del campo de la carga es

$$\mathcal{F} = \int d\mathcal{F} = \int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{4\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

o sea $\mathcal{F} = q/\epsilon_0$. Si q está al exterior de \mathcal{S} , cualquier rayo vector desde q cruzara \mathcal{S} un número par de veces, tal que

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \pm \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

en que los signos se alternan y se cancelan.

.11

Ley de Gauss

Usando el principio de superposición, $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$, concluimos que

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i,$$

en que la suma se extiende a todas las cargas encerradas en \mathcal{S} , o equivalentemente,

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) d\mathcal{V}, \quad (1)$$

donde \mathcal{V} es el volumen encerrado por \mathcal{S} . La Ec. 1 es la forma integral de la ley de Gauss.

.12

Forma diferencial de la ley de Gauss

Para un volumen pequeño $\delta\mathcal{V}$,

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \delta\mathcal{V}.$$

Definimos el operador div:

$$\text{div}(\vec{E}) = \lim_{\delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\delta\mathcal{V}}.$$

En coordenadas cartesianas, $\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, y tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0. \quad (2)$$

.13

2. Energía electrostática

2.1. Potencial eléctrico

Trabajo de la fuerza electrostática

El trabajo ejercido por la fuerza eléctrica al desplazar una carga de prueba q_p bajo la influencia de otra carga q es:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B q_p \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B q_p E ds \cos(\theta), \\ &= \frac{q_p q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right\}. \end{aligned}$$

Vemos que W es independiente del camino realizado. En particular, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$.
 \Rightarrow La fuerza electrostática es conservativa.

.14

Potencial eléctrico de una carga puntual

Definimos la energía potencial electrostática $U = q\phi(\vec{r})$ tal que

$$\underbrace{- \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{s}}_{\text{trabajo}} = \underbrace{q\phi_B - q\phi_A}_{\text{perdida de energía}}.$$

Si $\phi(\infty) = 0$,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

es el trabajo por unidad de carga necesario para acercar q_p desde infinito a \vec{r} .

ϕ tiene unidades de $\text{J C}^{-1} \equiv \text{Volt}$.

.15

Electron-Volt

El Joule es una unidad conveniente para expresar energías en sistemas macroscópicos. Pero a nivel (sub)atómico, es más conveniente usar el eV. 1 eV es la energía cinética que adquiere un electron al ser acelerado en una diferencia de potencial de 1 V:

$$K = \Delta U = q\Delta\phi = 1e \cdot 1V \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}.$$

.16

2.2. Potencial de N cargas y límite continuo.

Por el principio de superposición notamos que ϕ debe ser aditivo. Por ejemplo para dos cargas,

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\vec{\nabla}\phi_1 - \vec{\nabla}\phi_2 = -\vec{\nabla}(\phi_1 + \phi_2).$$

El potencial eléctrico generado por N cargas es entonces

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}.$$

En el límite de un continuo de cargas,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}.$$

.17

Forma diferencial

Consideremos un camino infinitesimal de \vec{r} a $\vec{r} + \delta\vec{r}$:

$$\delta\phi = \phi(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \delta\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \delta\vec{r},$$

en que suponemos $\delta\vec{r}$ suficientemente pequeño para que \vec{E} sea constante. En el límite diferencial $\delta \rightarrow d$, y en coordenadas cartesianas, $\delta\vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$, tenemos entonces

$$-d\phi = E_x dx + E_y dy + E_z dz.$$

$\Rightarrow E_x = -\partial\phi/\partial x, E_y = -\partial\phi/\partial y, E_z = -\partial\phi/\partial z$, o sea

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi.$$

Tarea: Calcular \vec{E} dado $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.

.18

Ecuación de Poisson

Con $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ y junto con la Ley de Gauss, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, obtenemos la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

.19

2.3. Líneas de campo y superficies equipotenciales

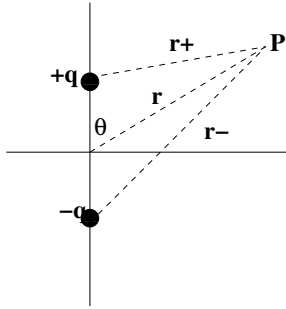
Una superficie equipotencial se define con $\phi(\vec{r}) = \text{Cte.}$. Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, se anula la proyección de $\vec{E}(\vec{r})$ sobre un plano tangente a una superficie equipotencial que contiene \vec{r} .

$\Rightarrow \vec{E}$ es perpendicular a las equipotenciales. Las líneas de campo son líneas continuas que son en todo punto perpendiculares a superficies equipotenciales.

.20

2.4. Potencial del dipolo eléctrico

Dipolo eléctrico



Calculemos el potencial producido por dos cargas idénticas y opuestas separadas por una distancia a . El potencial total en el punto P ubicado en \vec{r} es:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\} \text{ en que } r_{\pm} = r^2 + \frac{a^2}{4} \mp ar \cos(\theta).$$

Si $r \gg a$, expandimos $\frac{1}{r_{\pm}}$ en potencias de r/a , y

$$\phi = \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ a primer orden en } a/r.$$

Los términos de orden superior en a/r se llaman ‘multipolos’.

.21

Momento dipolar

Introducimos el momento dipolar eléctrico $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$, o sea en este caso $\vec{p} = qa\hat{z}$.

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \text{ a 1er orden.}$$

Esta expresión sería exacta si $a \rightarrow 0$ y $q \rightarrow \infty$.

Tarea: Calcular $\vec{E} = -\nabla\phi$ usando coordenadas cartesianas con $y = 0$ para simplificar. Solución: $E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (3 \cos(\theta) \sin(\theta) / r^3)$, $E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} (3 \cos^2(\theta) - 1) / r^3$.

.22

Dipolo de una distribución de cargas

El potencial de una distribución de cargas ρ es

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'.$$

Podemos repetir la aproximación anterior tomando $r \gg r'$:

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \right] dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \end{aligned}$$

Donde $Q = \int \rho(\vec{r}') dV'$, carga total, y $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$, momento dipolar total. Si $Q = 0$, entonces el término dominante es el dipolar eléctrico.

.23

2.5. Teorema de unicidad

Vimos que ϕ satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Dados un conjunto de condiciones de bordes que definen un sistema, la solución de la Ec. 3 es única. .24

Ejemplo

Consideremos una esfera conductora inmersa en un campo eléctrico uniforme. Cerca de la esfera la presencia de cargas libres dentro de la esfera genera campos locales, pero lejos de la esfera $\vec{E} = E_0 \hat{z}$. Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio. .25

Solución usando teorema de unicidad

En el interior $\phi = \phi_i = 0$, i.e. elegimos el potencial de la esfera como referencia (en infinito $\phi \neq 0$). Probemos con el potencial del dipolo, $\phi_e = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 z$. El límite asintótico en ∞ es el correcto. Continuidad en $r = a$ da $\vec{p} = E_0 a^3 4\pi\epsilon_0 \hat{z}$.

$$\Rightarrow \phi_e(\vec{r}) = \frac{E_0 a^3 \cos(\theta)}{r^2} - E_0 z.$$

Podemos confirmar que $\vec{E} \parallel \hat{r}$ en $r = a$. .26

2.6. Energía electrostática asociada a la materia sólida

Consideremos la energía potencial almacenada en un sólido:

- Los núcleos atómicos. Z cargas $+$ en un radio r , con $U \sim \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, en que r es el radio del núcleo. Para ^{235}U , $U \sim 3 \cdot 10^{-11}$ J. O sea 1 mol de ^{235}U tiene una energía potencial total de $2 \cdot 10^{13}$ J. Si se libera en 1 h, la potencia es $\sim 10^4$ MW. .27

- El sólido, compuesto por e- y núcleos positivos. La energía de la carga i es $q_i \phi(\vec{r}_i)$, en que $\phi(\vec{r}_i)$ es el potencial en \vec{r}_i debido a todas las otras cargas. Pero la energía total en el sólido es sólo $\frac{1}{2} \sum q_i \phi_i$, porque sólo hay que contar interacciones de a pares:

$$q_i \phi_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|},$$

y hay que contar cada interacción una sola vez. Otra manera de verlo es 'armar' el sólido desde infinito:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j < i} \frac{q_j}{r_{ji}} = \frac{1}{2 \times 4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ji}}.$$

Para átomos $U \sim \text{eV}$. .28

Condensadores

Un dispositivo para almacenar energía electromagnética es el condensador. Un condensador ideal consiste en dos placas conductoras, paralelas entre si, cuyo largo es mucho mayor a su separación. Si se cumplen estas condiciones, $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} = -\vec{\nabla}\phi$, $V = Ed$, en que d es la separación entre placas y $V = \Delta\phi$ es la diferencia de potencial entre placas.

$$\Rightarrow V = \frac{d}{\epsilon_0 A}Q, \text{ o sea } Q = CV, \text{ con } C = \epsilon_0 A/d.$$

C es la capacidad del condensador, con unidades de Farad: $1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1}$.

Esta proporcionalidad entre Q y V es válida para cualquier condensador, no necesariamente plano (ver demo en clase).

.29

Energía en condensadores

La energía almacenada por las cargas libres en un conductor:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho\phi d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \sigma\phi d\mathcal{S},$$

ya que no hay cargas libres en el interior. Consideremos ahora un condensador, compuesto por dos placas paralelas con cargas iguales y opuestas.

$$U = \frac{1}{2}\phi_+ \int \sigma_+ d\mathcal{S} + \frac{1}{2}\phi_- \int \sigma_- d\mathcal{S} = \frac{1}{2}Q\Delta\phi = \frac{1}{2}QV,$$

en que V es la diferencia de potencial (i.e. el 'voltaje').

.30

Energía en condensadores

Con $Q = CV$ y $U = \frac{1}{2}QV$, vemos que $U = \frac{1}{2}CV^2$. Además,

$$U = \frac{1}{2}d^2CE^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{\text{volumen}},$$

y como E es constante, introducimos la densidad de energía electrostática u :

$$U = \int u d\mathcal{V}, \text{ con } u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Veremos que esta es la expresión general de la energía almacenada en un campo electrostático.

.31

3. Dieléctricos

- Conductores: existen cargas libres, no ligadas a átomos. $\vec{E} = 0$.
- Dieléctricos: material no conductor, i.e. aislante. No existen cargas libres. Al aplicar \vec{E} , el desplazamiento de las cargas que constituyen los átomos es mucho menos que en un conductor, y tiende a reducir un poco el campo aplicado.

.32

3.1. Polarización

Consideremos un átomo inicialmente esféricamente simétrico que es sometido a un campo \vec{E} . Existe un desplazamiento de cargas $\vec{a} = \vec{R}_N - \vec{R}_{el}$, en que \vec{R}_N y \vec{R}_{el} son los baricentros de cargas nucleares y electrónicas, i.e.

$$\vec{R}_{el} = \int \rho_{el} \vec{r} d\mathcal{V} / \int \rho_{el} d\mathcal{V},$$

$$\vec{R}_N = \int \rho_N \vec{r} d\mathcal{V} / \int \rho_N d\mathcal{V}$$

\Rightarrow aparece un dipolo eléctrico $\vec{p} = Ze\vec{a}$. Si $\vec{p} \neq 0$ decimos que el átomo esta polarizado. En general,

$$\vec{p} = \int \vec{r}(\rho_{el} + \rho_N) d\mathcal{V}.$$

.33

Cargas superficiales de polarización

Consideremos un dieléctrico compuesto por 1 sólo elemento con Z e-. Al aplicar \vec{E} sus átomos se polarizan. Si $\vec{p} \parallel \vec{E}$ el dieléctrico es isotrópico (existen cristales anisotrópicos).

Consideremos ahora la parte del dieléctrico contenido en una caja rectangular macroscópica de volumen \mathcal{V} y sección S , alineada con \vec{E} . Sin contar el resto del dieléctrico, al aplicar \vec{E} aparecen cargas superficiales en $\delta\mathcal{V} = a S$, tal que la carga electrónica desplazada en dirección opuesta a \vec{E} es $\delta Q = -\delta\mathcal{V} n Z e$, donde n es la densidad de número de átomos.

La densidad superficial inducida es $\sigma_P = -n a Z e = -n p$. En general la carga inducida es

$\sigma_P = \vec{P} \cdot \delta\hat{S}$, con $\vec{P} = n\vec{p}$ vector polarización. Es importante notar que $\delta\hat{S}$ corresponde a la normal del volumen que encierra el dielectrico - se forman cargas superficiales sobre este volumen.

.34

Permitividad relativa

Vimos que la capacidad de un condensador plano paralelo en el vacío es

$$C_o = Q/V = \frac{A\sigma}{E_o d} = \frac{\epsilon_o A}{d},$$

en que \vec{E}_o es el campo eléctrico en el vacío y A es el área de cada placa. Si colocamos un dieléctrico entre las placas del condensador aparecen cargas superficiales $\pm P A$. Aplicando la ley de Gauss obtenemos el campo en el interior del dieléctrico:

$$EA = \frac{1}{\epsilon_o}(\sigma - P)A. \quad (4)$$

Definimos la permitividad relativa ϵ : $C = \epsilon C_o = \epsilon(\epsilon_o A/d)$, con C capacidad del condensador si un dieléctrico llena el espacio entre las placas. Usando Ec. 4 podemos evaluar ϵ :

$$C = Q/V = \frac{A\sigma}{Ed} = \frac{\epsilon_o A\sigma}{d(\sigma - P)}.$$

Re-usando Ec. 4, $\sigma = \epsilon_0 E + P$,

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \left\{ \frac{\epsilon_0 E + P}{\epsilon_0 E} \right\} = \frac{A\epsilon_0}{d} \left[1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} \right] = \frac{A\epsilon_0}{d} \epsilon.$$

.35

Suceptibilidad eléctrica

Tenemos entonces que la permitividad relativa

$$\epsilon = \left[1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} \right].$$

Introducimos la susceptibilidad eléctrica χ_E con

$$\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}.$$

El dipolo inducido a nivel atómico/molecular es $\vec{p} = \chi_E \epsilon_0 \vec{E} / n = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$, en que α es la “polarizabilidad molecular”.

Valores típicos para ϵ en dieléctricos:

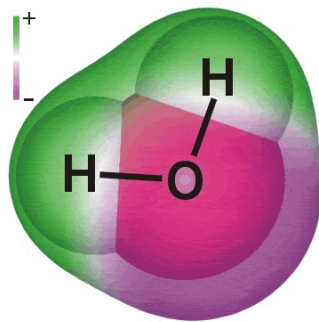
| Aire | Nylon | Porcelana | Mica |
|---------|-------|-----------|------|
| 1.00059 | 3.5 | 6 | 7 |

.36

Moléculas polares.

Existen medios compuestos por moléculas ‘polares’, con dipolo eléctrico permanente, que tiene $\epsilon \gg 1$, por ejemplo para agua $\epsilon \approx 80$.

Consideremos el enlace iónico de $\text{Na}^+ + \text{Cl}^- \rightarrow \text{NaCl}$ con un dipolo permanente \vec{p} . También H_2O tiene un dipolo permanente.



En fase líquida, estos dipolos están desordenados y su suma vectorial se cancela. Pero si aplicamos \vec{E} los dipolos se ordenan. Para comprender este fenómeno calculamos la energía potencial electrostática de un dipolo en \vec{E} externo.

.37

Energía de un dipolo en un campo externo

La energía potencial de dos cargas iguales y opuestas sometidas a un campo externo es $U = q\phi_+ - q\phi_- = \Delta V$. Si el campo es \approx cte a lo largo del dipolo, $\Delta V = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = -aE \cos(\theta)$, o sea $\boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$. \Rightarrow para minimizar energía, \vec{p} se alinea con \vec{E} .

Este resultado tbien se puede ver desde el continuo: dado $\phi(\vec{r})$ en la vecindad de una molécula polar,

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_o) + \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi|_{\vec{r}_o} + \dots = \phi_o - \delta\vec{r} \cdot \vec{E}_o,$$

en que \vec{r}_o es el baricentro de las cargas moleculares, y $\delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_o$. La energía potencial es $U = \int \rho\phi d\mathcal{V}$, sin factor 1/2 porque ϕ es externo. Colocando $\vec{r}_o = 0$,

$$U = \phi_o \int \rho d\mathcal{V} - \{\vec{r}\rho d\mathcal{V}\} \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

.38

3.2. Desplazamiento eléctrico

Densidad de cargas de polarización

Ahora consideraremos el caso de materiales con susceptibilidad variables, o campos \vec{E} no uniformes. Veremos que se induce una densidad de cargas de polarización.

Consideremos $\vec{E}(x) \parallel \hat{x}$, variable según x . Las cargas en el dieléctrico se separan. Para un pedazo de dieléctrico rectangular \mathcal{V} , de x a $x + \delta x$, y con sección $\delta S = \delta y \delta z$. Vemos que las cargas negativas salen de \mathcal{V} en x , con densidad superficial $\sigma = -P_x(x)$, mientras que entran cargas negativas en $x + \delta x$, con densidad superficial $\sigma = -P_x(x + \delta x)$. El balance de cargas en \mathcal{V} es

$$\begin{aligned} \delta Q &= \sigma(x + dx)\delta y \delta z - \sigma(x)\delta y \delta z \\ &= -\{P_x(x + \delta x) - P_x(x)\} \delta y \delta z \\ &= -\frac{\partial P_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

\Rightarrow aparece una densidad de cargas

$$\rho_P = \frac{\delta Q}{\delta \mathcal{V}} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

En general, para cualquier orientación $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$.

.39

Desplazamiento eléctrico

En un dieléctrico tenemos entonces cargas libres y cargas de polarización, $\rho = \rho_l + \rho_P$. \Rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho/\epsilon_o = (\rho_l + \rho_P)/\epsilon_o = (\rho_l - \vec{\nabla} \cdot \vec{P})/\epsilon_o \Leftrightarrow \\ \epsilon_o \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} &= \rho_l \Leftrightarrow \epsilon_o \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l, \end{aligned}$$

con $\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P}$ vector desplazamiento eléctrico. Como $\vec{P} = \chi_E \epsilon_o \vec{E}$, $\vec{D} = (1 + \chi_E)\epsilon_o \vec{E}$, y $\boxed{\vec{D} = \epsilon \epsilon_o \vec{E}}$. Si ϵ es uniforme, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_l/(\epsilon \epsilon_o)$, y vemos que si ϵ es uniforme el dieléctrico solamente reduce \vec{E} en un factor ϵ , sin cambiar las líneas de campos.

.40

Energía electrostática en dieléctricos

Consideremos un condensador, potencialmente con dieléctrico entre sus placas, y inicialmente sin cargas. Una carga dQ es transferida de la placa $-$ a $+$, por ejemplo con una batería, y la energía almacenada en las placas es:

$$dU = \phi_+ dQ - \phi_- dQ = V dQ, \text{ con } V = \phi_+ - \phi_-,$$

de manera que la energía total al transferir una carga Q es

$$U = \int_0^Q V dQ = \int_0^V CV' dV' = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV.$$

Con dieléctrico, $C = \epsilon\epsilon_0 A/d$, y el volumen es Ad , de manera que la densidad de energía es

$$u = U/\mathcal{V} = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 \left[\frac{V}{d} \right]^2 = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE.$$

El caso general es

$$U = \frac{1}{2} \int d\mathcal{V} \vec{D} \cdot \vec{E}.$$

.41

3.3. Condiciones de borde en electrostática

Consideremos una discontinuidad en ϵ . Aplicamos la ley de Gauss para un volumen rectangular con caras paralelas a la discontinuidad.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l = 0 \Rightarrow \int \vec{D} \cdot \delta S = 0 \Rightarrow \vec{D}_\perp \text{ es continuo.}$$

Para \vec{E} , como la fuerza electrostática es conservativa la circulación de \vec{E} sobre un camino cerrado es nula. Para un rectángulo,

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E}_\parallel \text{ es continuo.}$$

.42