

# Electromagnetismo

2014

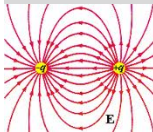
Simon Casassus Astronomía, Universidad de Chile

<http://www.das.uchile.cl/~simon>

- I Electrostática
- II Magnetostática
- III Inducción y ondas electromagnéticas.

# Parte I

## Electrostática



### 1 Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

#### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

#### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

#### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

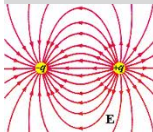
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dielectricos

Polarización

Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dielectricos

Polarización

Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática

## 1.1-Carga eléctrica

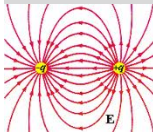
En el sistema MKS de unidades (i.e. el Sistema Internacional, S.I.),

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12},$$

con  $q_1$  y  $q_2$  en Coulombs (C), y  $\epsilon_0 = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \text{ C N m}^{-2}$ . Para un conjunto de  $N$  cargas, la fuerza resultante sobre la partícula  $j$  es:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij},$$

en que  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ .



### Fuerza electrostática

#### Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización

Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

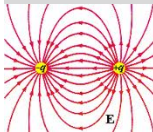
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización

Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización

Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática

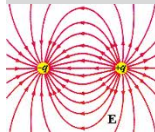
## 1.2-Campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}/q,$$

en que  $q$  es una carga de prueba ubicada en  $\vec{r}$ .  $\vec{E}$  tiene unidades de  $\text{V m}^{-1}$  (Volt / metros), o  $\text{N C}^{-1}$  (o sea  $\text{V} = \text{J} / \text{C}$ ). Para  $N$  cargas,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}_i) / \|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3.$$

Notar que  $\vec{E}$  es la suma de los campos de cada carga por separado. Esto es el *teorema de superposición*.



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización

Desplazamiento eléctrico

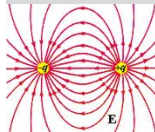
Condiciones de borde en electrostática

## Densidad de cargas

En el límite continuo, la carga  $Q$  encerrada en un volumen  $\mathcal{V}$  es

$$Q = \int_{\mathcal{V}} \rho d^3x,$$

en que  $\rho(\vec{r})$  es la densidad de carga eléctrica.



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización

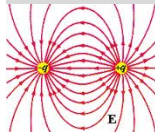
Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática

# Campo eléctrico

En el continuo,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{todo el espacio}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\vec{r}') d^3x'$$



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

Polarización

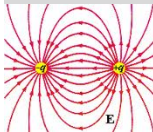
Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática



# Conductores

En un conductor existen electrones de conducción, libres de moverse en presencia de  $\vec{E}$ . En una situación estática,  
 $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$ .



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

Polarización

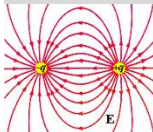
Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática

# Densidad de carga superficial

En conductores los electrones libres tenderán a acumularse en las bordes (i.e. las superficies), y es conveniente introducir la densidad superficial de cargas  $\sigma$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{superficie}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \sigma(\vec{r}') d^2x'$$



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica

Campo eléctrico

Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

Polarización

Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

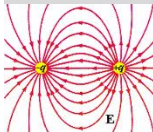
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico

Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

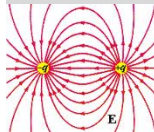
### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

# Flujo de un campo vectorial

El flujo de un campo  $\vec{E}$  a través de una superficie  $S$  es

$$\mathcal{F} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico

## Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

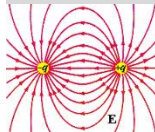
Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

# Angulo sólido

Consideremos una carga puntual  $q$  encerrada por una superficie  $\mathcal{S}$ . En un sistema de coordenadas esféricas centrado en  $q$ ,

$$d\vec{S} \cdot \hat{r} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \equiv r^2 d\Omega,$$

en que  $\Omega$  es un *ángulo sólido*.



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico

## Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

# Flujo del campo eléctrico por una superficie cerrada

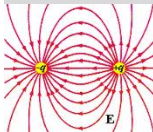
El flujo del campo de la carga es

$$\mathcal{F} = \int d\mathcal{F} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{4\pi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

o sea  $\mathcal{F} = q/\epsilon_0$ . Si  $q$  está al exterior de  $S$ , cualquier rayo vector desde  $q$  cruzara  $S$  un número par de veces, tal que

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \pm \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

en que los signos se alternan y se cancelan.



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico

## Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

# Ley de Gauss

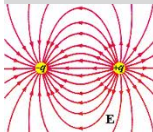
Usando el principio de superposición,  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ , concluimos que

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i,$$

en que la suma se extiende a todas las cargas encerradas en  $S$ , o equivalentemente,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV, \quad (1)$$

donde  $V$  es el volumen encerrado por  $S$ . La Ec. 1 es la forma integral de la ley de Gauss.



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico

## Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dielectricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

# Forma diferencial de la ley de Gauss

Para un volumen pequeño  $\delta\mathcal{V}$ ,

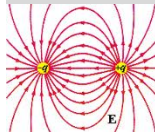
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \delta\mathcal{V}.$$

Definimos el operador div:

$$\text{div}(\vec{E}) = \lim_{\delta\mathcal{V} \rightarrow 0} \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\delta\mathcal{V}}.$$

En coordenadas cartesianas,  $\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ , y tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0. \quad (2)$$



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico

## Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



# Outline

## 1 Fuerza electrostática

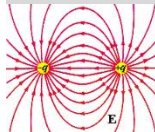
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dielectricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

#### Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dielectricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

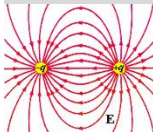
## Trabajo de la fuerza electrostática

El trabajo ejercido por la fuerza eléctrica al desplazar una carga de prueba  $q_p$  bajo la influencia de otra carga  $q$  es:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B q_p \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B q_p E ds \cos(\theta), \\ &= \frac{q_p q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right\}. \end{aligned}$$

Vemos que  $W$  es independiente del camino realizado. En particular,  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ .

⇒ La fuerza electrostática es conservativa.



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

#### Potencial eléctrico

- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

# Potencial eléctrico de una carga puntual

Definimos la energía potencial electrostática  $U = q\phi(\vec{r})$  tal que

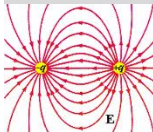
$$\underbrace{- \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{s}}_{\text{trabajo}} = \underbrace{q\phi_B - q\phi_A}_{\text{perdida de energía}} .$$

Si  $\phi(\infty) = 0$ ,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

es el trabajo por unidad de carga necesario para acercar  $q_p$  desde infinito a  $\vec{r}$ .

$\phi$  tiene unidades de  $\text{J C}^{-1} \equiv \text{Volt}$ .



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## Energía electrostática

### Potencial eléctrico

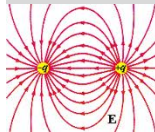
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

El Joule es una unidad conveniente para expresar energías en sistemas macroscópicos. Pero a nivel (sub)atómico, es más conveniente usar el eV. 1 eV es la energía cinética que adquiere un electron al ser acelerado en una diferencia de potencial de 1 V:

$$K = \Delta U = q\Delta\phi = 1e \, 1V \approx 1,6 \cdot 10^{-19}J.$$



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

#### Potencial eléctrico

- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

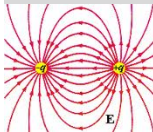
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## 2.2-Potencial de $N$ cargas y límite continuo.

Por el principio de superposición notamos que  $\phi$  debe ser aditivo. Por ejemplo para dos cargas,

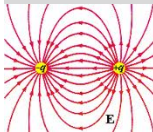
$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\vec{\nabla}\phi_1 - \vec{\nabla}\phi_2 = -\vec{\nabla}(\phi_1 + \phi_2).$$

El potencial eléctrico generado por  $N$  cargas es entonces

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}.$$

En el límite de un continuo de cargas,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')d^3\vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}.$$



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico

- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico

- Teorema de unicidad

- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización

- Desplazamiento eléctrico

- Condiciones de borde en electrostática

## Forma diferencial

Consideremos un camino infinitesimal de  $\vec{r}$  a  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ :

$$\delta\phi = \phi(\vec{r} + \delta\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \delta\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \delta\vec{r},$$

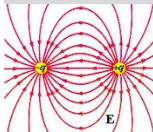
en que suponemos  $\delta\vec{r}$  suficientemente pequeño para que  $\vec{E}$  sea constante. En el límite diferencial  $\delta \rightarrow d$ , y en coordenadas cartesianas,  $\delta\vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ , tenemos entonces

$$-d\phi = E_x dx + E_y dy + E_z dz.$$

$\Rightarrow E_x = -\partial\phi/\partial x$ ,  $E_y = -\partial\phi/\partial y$ ,  $E_z = -\partial\phi/\partial z$ , o sea

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi.$$

**Tarea:** Calcular  $\vec{E}$  dado  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ .



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y  
límite continuo.

Líneas de campo y  
superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo  
eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática  
asociada a la materia sólida

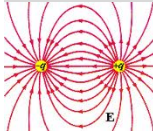
### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en  
electrostática

# Ecuación de Poisson

Con  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  y junto con la Ley de Gauss,  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , obtenemos la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$



## Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## Energía electrostática

Potencial eléctrico

Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

Polarización

Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática



# Outline

## 1 Fuerza electrostática

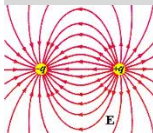
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
**Líneas de campo y superficies equipotenciales**  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y  
límite continuo.

### Líneas de campo y superficies equipotenciales

Potencial del dipolo  
eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática  
asociada a la materia sólida

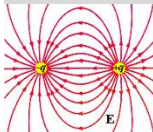
### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en  
electrostática

## 2.3-Líneas de campo y superficies equipotenciales

Una superficie equipotencial se define con  $\phi(\vec{r}) = \text{Cte.}$ . Como  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ , se anula la proyección de  $\vec{E}(\vec{r})$  sobre un plano tangente a una superficie equipotencial que contiene  $\vec{r}$ .

$\Rightarrow \vec{E}$  es perpendicular a las equipotenciales. Las líneas de campo son líneas continuas que son en todo punto perpendiculares a superficies equipotenciales.



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.

### Líneas de campo y superficies equipotenciales

- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

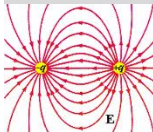
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales

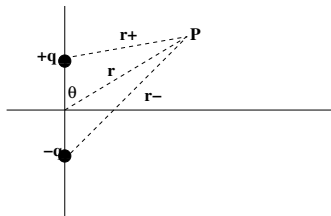
### Potencial del dipolo eléctrico

Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## Dipolo eléctrico



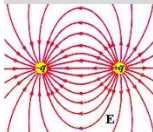
Calculemos el potencial producido por dos cargas idénticas y opuestas separadas por una distancia  $a$ . El potencial total en el punto  $P$  ubicado en  $\vec{r}$  es:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\} \text{ en que } r_{\pm} = r^2 + \frac{a^2}{4} \mp ar \cos(\theta).$$

Si  $r \gg a$ , expandimos  $\frac{1}{r_{\pm}}$  en potencias de  $r/a$ , y

$$\phi = \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ a primer orden en } a/r.$$

Los términos de orden superior en  $a/r$  se llaman ‘multipolos’.



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales

### Potencial del dipolo eléctrico

- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

# Momento dipolar

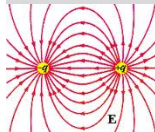
Introducimos el momento dipolar eléctrico  $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ , o sea en este caso  $\vec{p} = qa\hat{z}$ .

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \text{ a 1er orden.}$$

Esta expresión sería exacta si  $a \rightarrow 0$  y  $q \rightarrow \infty$ .

**Tarea:** Calcular  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  usando coordenadas cartesianas con  $y = 0$  para simplificar. Solución:

$$E_x = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} (3 \cos(\theta) \sin(\theta)/r^3), \quad E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} (3 \cos^2(\theta) - 1) / r^3.$$



## Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

## Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales

## Potencial del dipolo eléctrico

- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dielectricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

## Dipolo de una distribución de cargas

El potencial de una distribución de cargas  $\rho$  es

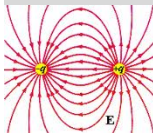
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'.$$

Podemos repetir la aproximación anterior tomando  $r \gg r'$ :

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \left[ \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \right] dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \end{aligned}$$

Donde  $Q = \int \rho(\vec{r}') dV'$ , carga total, y  $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$ , momento dipolar total. Si  $Q = 0$ , entonces el término dominante es el dipolar eléctrico.



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales

### Potencial del dipolo eléctrico

- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dielectricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

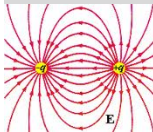
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dielectricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico

### Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dielectricos

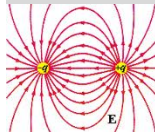
Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## 2.5-Teorema de unicidad

Vimos que  $\phi$  satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Dados un conjunto de condiciones de bordes que definen un sistema, la solución de la Ec. 3 es única.



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico

### Teorema de unicidad

Energía electrostática asociada a la materia sólida

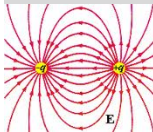
### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



## Ejemplo : Teorema de unicidad

Consideremos una esfera conductora inmersa en un campo eléctrico uniforme. Cerca de la esfera la presencia de cargas libres dentro de la esfera genera campos locales, pero lejos de la esfera  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ . Calcule el potencial eléctrico en todo el espacio.



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico

### Teorema de unicidad

- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

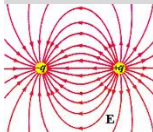
- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

## Solución usando teorema de unicidad

En el interior  $\phi = \phi_i = 0$ , i.e. elegimos el potencial de la esfera como referencia (en infinito  $\phi \neq 0$ ). Probemos con el potencial del dipolo,  $\phi_e = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 z$ . El límite asintótico en  $\infty$  es el correcto. Continuidad en  $r = a$  da  $\vec{p} = E_0 a^3 4\pi\epsilon_0 \hat{z}$ .

$$\Rightarrow \phi_e(\vec{r}) = \frac{E_0 a^3 \cos(\theta)}{r^2} - E_0 z.$$

Podemos confirmar que  $\vec{E} \parallel \hat{r}$  en  $r = a$ .



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico

### Teorema de unicidad

- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

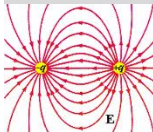
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad

### Energía electrostática asociada a la materia sólida

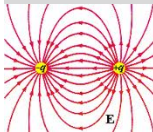
### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## 2.6-Energía electrostática asociada a la materia sólida

Consideremos la energía potencial almacenada en un sólido:

- Los núcleos atómicos.  $Z$  cargas  $+$  en un radio  $r$ , con  $U \sim \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ , en que  $r$  es el radio del núcleo. Para  $^{235}\text{U}$ ,  $U \sim 3 \cdot 10^{-11}$  J. O sea 1 mol de  $^{235}\text{U}$  tiene una energía potencial total de  $2 \cdot 10^{13}$  J. Si se libera en 1 h, la potencia es  $\sim 10^4$  MW.



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad

### Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## 2.6-Energía electrostática asociada a la materia sólida

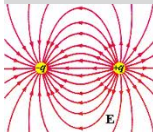
- El sólido, compuesto por e- y núcleos positivos. La energía de la carga  $i$  es  $q_i\phi(\vec{r}_i)$ , en que  $\phi(\vec{r}_i)$  es el potencial en  $\vec{r}_i$  debido a todas las otras cargas. Pero la energía total en el sólido es sólo  $\frac{1}{2} \sum q_i\phi_i$ , porque sólo hay que contar interacciones de a pares:

$$q_i\phi_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|},$$

y hay que contar cada interacción una sola vez. Otra manera de verlo es ‘armar’ el sólido desde infinito:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j < i} \frac{q_j}{r_{ji}} = \frac{1}{2 \times 4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ji}}.$$

Para átomos  $U \sim eV$ .



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad

### Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

# Condensadores

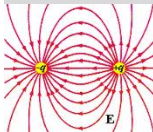
Un dispositivo para almacenar energía electromagnética es el condensador. Un condensador ideal consiste en dos placas conductoras, paralelas entre si, cuyo largo es mucho mayor a su separación. Si se cumplen estas condiciones,

$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} = -\vec{\nabla}\phi$ ,  $V = Ed$ , en que  $d$  y es la separación entre placas y  $V = \Delta\phi$  es la diferencia de potencial entre placas.

$$\Rightarrow V = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q, \text{ o sea } Q = CV, \text{ con } C = \epsilon_0 A/d.$$

$C$  es la capacidad del condensador, con unidades de Farad:  $1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1}$ .

Esta proporcionalidad entre  $Q$  y  $V$  es válida para cualquier condensador, no necesariamente plano (ver demo en clase).



## Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

## Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad

## Energía electrostática asociada a la materia sólida

## Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

## Energía en condensadores

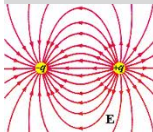
La energía almacenada por las cargas libres en un conductor:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV = \frac{1}{2} \int_S \sigma \phi dS,$$

ya que no hay cargas libres en el interior. Consideremos ahora un condensador, compuesto por dos placas paralelas con cargas iguales y opuestas.

$$U = \frac{1}{2} \phi_+ \int \sigma_+ dS + \frac{1}{2} \phi_- \int \sigma_- dS = \frac{1}{2} Q \Delta \phi = \frac{1}{2} QV,$$

en que  $V$  es la diferencia de potencial ( i.e. el 'voltaje').



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad

### Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

## Energía en condensadores

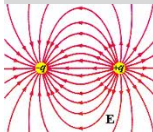
Con  $Q = CV$  y  $U = \frac{1}{2}QV$ , vemos que  $U = \frac{1}{2}CV^2$ . Además,

$$U = \frac{1}{2}d^2CE^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{\text{volumen}},$$

y como  $E$  es constante, introducimos la densidad de energía electrostática  $u$ :

$$U = \int u dV, \text{ con } u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Veremos que esta es la expresión general de la energía almacenada en un campo electrostático.



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad

### Energía electrostática asociada a la materia sólida

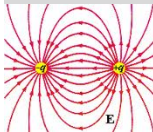
### Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática



## 3-Dieléctricos

- Conductores: existen cargas libres, no ligadas a átomos.  $\vec{E} = 0$ .
- Dieléctricos: material no conductor, i.e. aislante. No existen cargas libres. Al aplicar  $\vec{E}$ , el desplazamiento de las cargas que constituyen los átomos es mucho menos que en un conductor, y tiende a reducir un poco el campo aplicado.



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

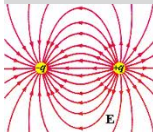
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

#### Polarización

Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## 3.1-Polarización

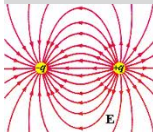
Consideremos un átomo inicialmente esféricamente simétrico que es sometido a un campo  $\vec{E}$ . Existe un desplazamiento de cargas  $\vec{a} = \vec{R}_N - \vec{R}_{el}$ , en que  $\vec{R}_N$  y  $\vec{R}_{el}$  son los baricentros de cargas nucleares y electrónicas, i.e.

$$\vec{R}_{el} = \int \rho_{el} \vec{r} dV / \int \rho_{el} dV,$$

$$\vec{R}_N = \int \rho_N \vec{r} dV / \int \rho_N dV$$

$\Rightarrow$  aparece un dipolo eléctrico  $\vec{p} = Ze\vec{a}$ . Si  $\vec{p} \neq 0$  decimos que el átomo esta polarizado. En general,

$$\vec{p} = \int \vec{r}(\rho_{el} + \rho_N) dV.$$



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

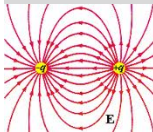
#### Polarización

Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## Cargas superficiales de polarización

Consideremos un dieléctrico compuesto por 1 sólo elemento con  $Z$  e-. Al aplicar  $\vec{E}$  sus átomos se polarizan. Si  $\vec{p} \parallel \vec{E}$  el dieléctrico es isotrópico (existen cristales anisotrópicos). Consideremos ahora la parte del dieléctrico contenido en una caja rectangular macroscópica de volumen  $\mathcal{V}$  y sección  $S$ , alineada con  $\vec{E}$ . Sin contar el resto del dieléctrico, al aplicar  $\vec{E}$  aparecen cargas superficiales en  $\delta\mathcal{V} = a S$ , tal que la carga electrónica desplazada en dirección opuesta a  $\vec{E}$  es  $\delta Q = -\delta\mathcal{V} n Z e$ , donde  $n$  es la densidad de número de átomos. La densidad superficial inducida es  $\sigma_P = -n a Z e = -n p$ . En general la carga inducida es

$\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{\delta S}$ , con  $\vec{P} = n\vec{p}$  vector polarización. Es importante notar que  $\delta\hat{S}$  corresponde a la normal del volumen que encierra el dieléctrico - se forman cargas superficiales sobre este volumen.



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dielectricos

#### Polarización

- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

## Permitividad relativa

Vimos que la capacidad de un condensador plano paralelo en el vacío es

$$C_o = Q/V = \frac{A\sigma}{E_o d} = \frac{\epsilon_o A}{d},$$

en que  $\vec{E}_o$  es el campo eléctrico en el vacío y  $A$  es el área de cada placa. Si colocamos un dieléctrico entre las placas del condensador aparecen cargas superficiales  $\pm PA$ . Aplicando la ley de Gauss obtenemos el campo en el interior del dieléctrico:

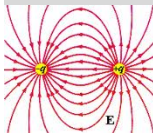
$$EA = \frac{1}{\epsilon_o}(\sigma - P)A. \quad (4)$$

Definimos la permitividad relativa  $\epsilon$ :  $C = \epsilon C_o = \epsilon(\epsilon_o A/d)$ , con  $C$  capacidad del condensador si un dieléctrico llena el espacio entre las placas. Usando Ec. 4 podemos evaluar  $\epsilon$ :

$$C = Q/V = \frac{A\sigma}{Ed} = \frac{\epsilon_o A\sigma}{d(\sigma - P)}.$$

Re-usando Ec. 4,  $\sigma = \epsilon_o E + P$ ,

$$C = \frac{A\epsilon_o}{d} \left\{ \frac{\epsilon_o E + P}{\epsilon_o E} \right\} = \frac{A\epsilon_o}{d} \left[ 1 + \frac{P}{\epsilon_o E} \right] = \frac{A\epsilon_o}{d} \epsilon.$$



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

#### Polarización

- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

## Suceptibilidad eléctrica

Tenemos entonces que la permitividad relativa

$$\epsilon = \left[ 1 + \frac{P}{\epsilon_0 \vec{E}} \right].$$

Introducimos la susceptibilidad eléctrica  $\chi_E$  con

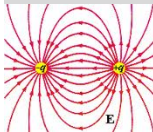
$$\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}.$$

El dipolo inducido a nivel atómico/molecular es

$\vec{p} = \chi_E \epsilon_0 \vec{E} / n = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ , en que  $\alpha$  es la “polarizabilidad molecular”.

Valores típicos para  $\epsilon$  en dieléctricos:

Aire	Nylon	Porcelana	Mica
1.00059	3.5	6	7



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

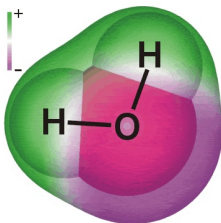
#### Polarización

- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

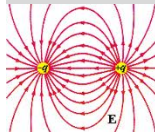
## Moléculas polares.

Existen medios compuestos por moléculas 'polares', con dipolo eléctrico permanente, que tiene  $\epsilon \gg 1$ , por ejemplo para agua  $\epsilon \approx 80$ .

Consideremos el enlace iónico de  $\text{Na}^+ + \text{Cl}^- \rightarrow \text{NaCl}$  con un dipolo permanente  $\vec{p}$ . También  $\text{H}_2\text{O}$  tiene un dipolo permanente.



En fase líquida, estos dipolos están desordenados y su suma vectorial se cancela. Pero si aplicamos  $\vec{E}$  los dipolos se ordenan. Para comprender este fenómeno calculamos la energía potencial electrostática de un dipolo en  $\vec{E}$  externo.



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

#### Polarización

Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## Energía de un dipolo en un campo externo

La energía potencial de dos cargas iguales y opuestas sometidas a un campo externo es  $U = q\phi_+ - q\phi_- = \Delta V$ . Si el campo es  $\approx$  cte a lo largo del dipolo,

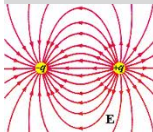
$\Delta V = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = -aE \cos(\theta)$ , o sea  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ .  $\Rightarrow$  para minimizar energía,  $\vec{p}$  se alinea con  $\vec{E}$ .

Este resultado tbien se puede ver desde el continuo: dado  $\phi(\vec{r})$  en la vecindad de una molécula polar,

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_o) + \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi|_{\vec{r}_o} + \dots = \phi_o - \delta\vec{r} \cdot \vec{E}_o,$$

en que  $\vec{r}_o$  es el baricentro de las cargas moleculares, y  $\delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_o$ . La energía potencial es  $U = \int \rho\phi dV$ , sin factor 1/2 porque  $\phi$  es externo. Colocando  $\vec{r}_o = 0$ ,

$$U = \phi_o \int \rho dV - \{ \vec{r} \rho dV \} \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

#### Polarización

- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática



# Outline

## 1 Fuerza electrostática

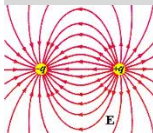
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática

## Densidad de cargas de polarización

Ahora consideraremos el caso de materiales con susceptibilidad variables, o campos  $\vec{E}$  no uniformes. Veremos que se induce una densidad de cargas de polarización.

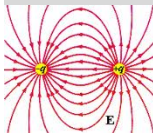
Consideremos  $\vec{E}(x) \parallel \hat{x}$ , variable según  $x$ . Las cargas en el dieléctrico se separan. Para un pedazo de dieléctrico rectangular  $\mathcal{V}$ , de  $x$  a  $x + \delta x$ , y con sección  $\delta S = \delta y \delta z$ . Vemos que las cargas negativas salen de  $\mathcal{V}$  en  $x$ , con densidad superficial  $\sigma = -P_x(x)$ , mientras que entran cargas negativas en  $x + \delta x$ , con densidad superficial  $\sigma = -P_x(x + \delta x)$ . El balance de cargas en  $\mathcal{V}$  es

$$\begin{aligned}\delta Q &= \sigma(x + dx)\delta y \delta z - \sigma(x)\delta y \delta z \\ &= -\{P_x(x + \delta x) - P_x(x)\} \delta y \delta z \\ &= -\frac{\partial P_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  aparece una densidad de cargas

$$\rho_P = \frac{\delta Q}{\delta \mathcal{V}} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

En general, para cualquier orientación  $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ .



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización

### Desplazamiento eléctrico

- Condiciones de borde en electrostática

## Desplazamiento eléctrico

En un dieléctrico tenemos entonces cargas libres y cargas de polarización,  $\rho = \rho_I + \rho_P$ .  $\Rightarrow$

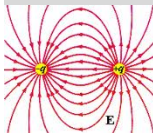
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 = (\rho_I + \rho_P) / \epsilon_0 = (\rho_I - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) / \epsilon_0 \Leftrightarrow$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_I \Leftrightarrow \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_I,$$

con  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  vector desplazamiento eléctrico. Como

$\vec{P} = \chi_E \epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{D} = (1 + \chi_E) \epsilon_0 \vec{E}$ , y  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ . Si  $\epsilon$  es uniforme,

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_I \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_I / (\epsilon \epsilon_0)$ , y vemos que si  $\epsilon$  es uniforme el dieléctrico solamente reduce  $\vec{E}$  en un factor  $\epsilon$ , sin cambiar las líneas de campos.



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Diélectricos

- Polarización

### Desplazamiento eléctrico

- Condiciones de borde en electrostática

## Energía electrostática en dieléctricos

Consideremos un condensador, potencialmente con dieléctrico entre sus placas, y inicialmente sin cargas. Una carga  $dQ$  es transferida de la placa  $-$  a  $+$ , por ejemplo con una batería, y la energía almacenada en las placas es:

$$dU = \phi_+ dQ - \phi_- dQ = VdQ, \text{ con } V = \phi_+ - \phi_-,$$

de manera que la energía total al transferir una carga  $Q$  es

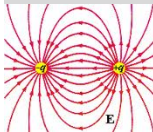
$$U = \int_0^Q VdQ = \int_0^V CV' dV' = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV.$$

Con dieléctrico,  $C = \epsilon\epsilon_0 A/d$ , y el volumen es  $Ad$ , de manera que la densidad de energía es

$$u = U/\mathcal{V} = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 \left[ \frac{V}{d} \right]^2 = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE.$$

El caso general es

$$U = \frac{1}{2} \int d\mathcal{V} \vec{D} \cdot \vec{E}.$$



### Fuerza electrostática

- Carga eléctrica
- Campo eléctrico
- Ley de Gauss

### Energía electrostática

- Potencial eléctrico
- Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.
- Líneas de campo y superficies equipotenciales
- Potencial del dipolo eléctrico
- Teorema de unicidad
- Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

- Polarización
- Desplazamiento eléctrico
- Condiciones de borde en electrostática

# Outline

## 1 Fuerza electrostática

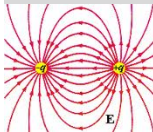
Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

## 2 Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

## 3 Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico  
Condiciones de borde en electrostática



### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática

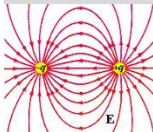
### 3.3-Condiciones de borde en electrostática

Consideremos una discontinuidad en  $\epsilon$ . Aplicamos la ley de Gauss para un volumen rectangular con caras paralelas a la discontinuidad.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l = 0 \Rightarrow \int \vec{D} \cdot \delta S = 0 \Rightarrow \vec{D}_{\perp} \text{ es continuo.}$$

Para  $\vec{E}$ , como la fuerza electrostática es conservativa la circulación de  $\vec{E}$  sobre un camino cerrado es nula. Para un rectángulo,

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\parallel} \text{ es continuo.}$$



#### Fuerza electrostática

Carga eléctrica  
Campo eléctrico  
Ley de Gauss

#### Energía electrostática

Potencial eléctrico  
Potencial de  $N$  cargas y límite continuo.  
Líneas de campo y superficies equipotenciales  
Potencial del dipolo eléctrico  
Teorema de unicidad  
Energía electrostática asociada a la materia sólida

#### Dieléctricos

Polarización  
Desplazamiento eléctrico

Condiciones de borde en electrostática