

Parte II

Magnetostática

Índice

II Magnetostática	1
1. Corriente eléctrica y ley de Ohm	1
1.1. Corrientes y resistencias	1
1.2. Ecuación de continuidad	2
1.3. fem y efecto Joule	3
2. Campo magnético	3
2.1. Fuerza de Lorentz y efecto Hall	3
2.2. Dipolo magnético	5
2.3. Ley de Biot-Savart y potencial vector	5
2.4. Ley de Ampère	6
3. Materiales magnéticos	7
3.1. Momentos magnéticos microscópicos	7
3.2. Campo $\vec{B}$ producido por un dipolo.	8
3.3. Magnetización	10
3.4. Campo $\vec{H}$	11
3.5. Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo	11

Cargas en movimiento cerca de corrientes eléctricas son sometidas a una fuerza adicional a la del campo eléctrica, y parametrizable en términos de un campo vectorial llamado “*campo magnético*”. En este capítulo estudiaremos el caso de corrientes estacionarias, i.e. la magnetostática.

1. Corriente eléctrica y ley de Ohm

1.1. Corrientes y resistencias

Intensidad de corriente

Para medir el flujo de carga eléctrica usamos la *densidad de corriente*

$$\vec{j} = nq\vec{v}, \text{ y la intensidad de corriente } I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Las unidades de I son Ampère, $A = C s^{-1}$, y las de $\vec{j}$ son $A m^{-2}$.

.4

Ley de Ohm

- Consideremos un cable de largo l , y con una diferencia de potencial eléctrico V entre sus extremos: $V = \Delta\phi = El$. En ausencia de $\vec{E}$ no hay corrientes $\Rightarrow$ a primer orden $\vec{j} \propto \vec{E}$, si $\|\vec{E}\|$ es suficientemente “pequeño”.
- Ponemos $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.
- El movimiento de los electrones es libre bajo la influencia de $\vec{E}$, pero se ve obstaculizado por choques con defectos o impurezas en el conductor.
- Entre cada choque que sufran los e-, son acelerados por $\vec{E}$, i.e. con $m\dot{v} = qE \Rightarrow v = qEt/m + v(0)$.
- Para calcular la conductividad σ aplicamos teoría cinética a un gas ideal de e-. El tiempo entre colisiones $\tau = l/v_T$, en que l es el libre camino medio entre impurezas $l = 1/(n_i A_i)$, y $v_T = \sqrt{3kT/m}$ es la velocidad termal.
- En promedio $v(0) = 0$, $v = \frac{qE}{m}\tau$, y como $\vec{j} = nq\vec{v}$, $j = nq^2 \frac{E}{m} \tau \Rightarrow \sigma = nq^2 \tau / m = nq^2 / \left(n_i A_i \sqrt{3mkT} \right)$.

.5

Valores típicos de conductividad

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

material	cobre	H ₂ O+NaCl	vidrio	madera
$\sigma/\text{Ohm m}^{-1}$	$5,9 \cdot 10^7$	23	10^{-10}	10^{-11}

.6

Resistencia

Con $E = V/d$, y $I = A\sigma E = \sigma AV/d$, tenemos

$$j = \sigma E,$$

$$V = RI \text{ con } \boxed{R = \frac{d}{\sigma A}}.$$

.7

1.2. Ecuación de continuidad

Consideremos la variación temporal de la carga Q encerrada en un volumen $\mathcal{V}$:

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}.$$

Por conservación de carga, la variación de $Q(t)$ es igual al flujo de cargas por la superficie $\mathcal{S}$ que encierra al volumen $\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}, \\ \Leftrightarrow \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} &= - \int_{\mathcal{S}} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\mathcal{V}, \text{ para cualquier } \mathcal{V}, \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}.\end{aligned}$$

.8

1.3. fem y efecto Joule

Fuerza electromotriz

- Vimos en electrostática que en un conductor $\vec{E} = 0 \Rightarrow \phi = Cte \Rightarrow V = 0$. Luego, para establecer una corriente en un cable conductor es necesario mantener los extremos del cable a una diferencia de potencial $V \neq 0$ usando una *batería*, o una “fem” V .
- La batería transforma energía potencial química en energía potencial eléctrica (tal como la que se acumula en un condensador).
- Ejemplo: ver la batería descrita en Feynman II, 22-2, p22-7.

.9

Potencia disipada

- Dados V en un cable de largo l , $\vec{E} = Cte = \vec{j}/\sigma$, o sea la $\langle v \rangle$ de los e^- es Cte.
- Dado que $\langle v \rangle$ es Cte, los e^- no son acelerados en promedio, y la energía potencial correspondiente a la caída de potencial, que debiera convertirse en un incremento de energía cinética, se disipa en calor a través de la fricción de los e^- con los defectos o impurezas en el conductor.
- $dU = V dq \Rightarrow P = V \frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{P = VI = RI^2}$.

.10

2. Campo magnético

2.1. Fuerza de Lorentz y efecto Hall

Fuerza de Lorentz

- Una carga en movimiento cerca de otras cargas en movimientos es afectada por un campo adicional al campo eléctrico, parametrizable en términos de otro campo vectorial, llamado campo magnética $\vec{B}$. Este efecto radica en la transformación relativista de los campos eléctricos de las cargas involucradas desde un sistema de inercia a otro. Para más detalles, revisar Feynman II.

- La fuerza neta percibida por una carga q se llama la fuerza de Lorentz, y escribe

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

- Las unidades de B son

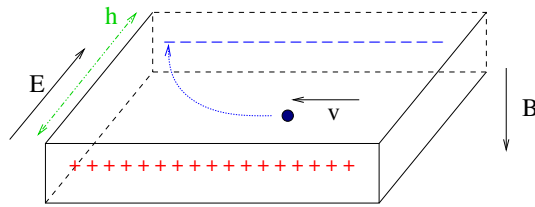
$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{C m s}^{-1}} = \text{T} = 10^4 \text{G},$$

en que el Tesla se usa en MKS, mientras que el Gauss se usa en CGS.

.11

Efecto Hall

Para medir $\vec{B}$ podemos usar por ejemplo el efecto Hall.



Si $\vec{v} \perp \vec{B}$, el movimiento de la carga en azul (un electrón) es circular uniforme con radio de Larmor $r_L = v/\omega_L$, $\omega_L = \frac{eB}{2m} = v/r_L$ (tarea).

Si $h \ll r_L$, en una situación estacionaria

$$-e\vec{E} = e\vec{v} \wedge \vec{B}, \text{ con } E = V/h, \Rightarrow V = vBh,$$

$$\text{y como } I = nevA, \text{ con } A \text{ sección del conductor, } V = \frac{IhB}{neA}.$$

AN: $B \sim 1 \text{ T}$, barra de cobre de $0,5 \times 0,1 \text{ cm}$, $I = 1 \text{ A}$, y 1 e- libre por átomo de cobre $\Rightarrow V \sim 10^{-7} \text{ V}$. Es más conveniente usar semiconductores¹, con n chico ($\ll 1$ e- libre por átomo).

.12

Ausencia de carga magnética

Podemos medir las líneas de $\vec{B}$ usando, por ejemplo, el efecto Hall. Se encuentra que son cerradas: no tienen origen ni fin. Para un volumen cualquiera, igual tantas líneas entran y salen de $\mathcal{V}$, de manera que

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}.$$

Por analogía con $\vec{E}$ vemos que no existen cargas magnéticas.

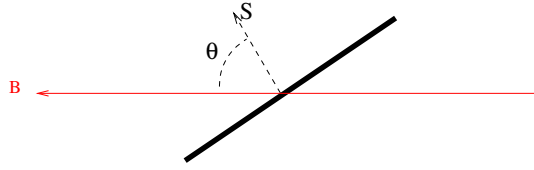
.13

¹conduce en una sola dirección

2.2. Dipolo magnético

Torque sobre un dipolo magnético

Consideremos un circuito eléctrico rectangular, con brazos verticales de largo L_1 , brazos horizontales L_2 , y sección A , por el cual pasa una corriente I , y que es permeado por un campo magnético $\vec{B}$, como se indica en la Fig., en una proyección de planta.



El torque debido a la resultante de la fuerza de Lorentz que actúa sobre los electrones es

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2 \frac{L_2}{2} (n L_1 A) q |\vec{v} \times \vec{B}| \sin(\theta) = L_2 L_1 I B \sin(\theta) \\ &= I S B \sin(\theta), \text{ o sea } \vec{\Gamma} = I \vec{S} \times \vec{B}.\end{aligned}$$

Definimos el *momento dipolar magnético* $\vec{m} = I \vec{S}$, de manera que $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}}$.

.14

Energía del dipolo magnético

Existe una energía potencial magnética asociada al torque. Análogamente a $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, si orientamos la coordenada s según $\vec{F}$ entonces $F \sim -\partial U / \partial s$. En caso de la aplicación de torque a un cuerpo rígido, r mide la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza F y el eje de rotación, o sea r es la ‘palanca’. Si θ es el ángulo de rotación tenemos $\partial s = r \partial \theta$, y $\Gamma = r F$, de manera que $\Gamma \sim -\partial U / \partial \theta$. Entonces

$$U = -I S B \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{U = -\vec{m} \cdot \vec{B}}.$$

La forma de esta energía magnética es muy similar a la del dipolo eléctrico ($-\vec{p} \cdot \vec{E}$), lo cual motiva el uso de las palabras ‘momento dipolar magnético’, por analogía con el momento dipolar eléctrico.

.15

2.3. Ley de Biot-Savart y potencial vector

Ley de Bio-Savart

El campo $\vec{B}$ producido por una carga q' con velocidad $\vec{v}'$ es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q' \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \text{ con } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}.$$

Entonces un elemento de circuito con intensidad $I = n A q' v'$ y largo dl produce un campo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q' n A v' d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

y para un circuito cerrado,

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \oint d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

.16

Potencial vector

Pasemos al continuo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} q' \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rightarrow d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\mathcal{V}'$$

$$q' \rightarrow \rho d\mathcal{V}', \text{ con } \vec{j}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}'.$$

Notamos que $(\vec{r} - \vec{r}') / |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = -\vec{\nabla} (1/|\vec{r} - \vec{r}'|)$, y

$$d\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_o}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}' = \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}',$$

$$\text{entonces } \vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}, \text{ con } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'.$$

.17

Potencial vector y ausencia de cargas magnéticas

Como $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, hay un cierto grado de libertad en la definición de $\vec{A}$, llamado “libertad de Gauge”. Si le agregamos un vector constante, $\vec{B}$ queda invariante. Además, como $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}) = 0$ para cualquier Λ , también queda invariante $\vec{B}$ al agregar $\vec{\nabla} \Lambda$.

La forma más general posible de $\vec{A}$ es entonces

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_o - \vec{r}'|} \right\} \vec{j}(\vec{r}') d\mathcal{V}' + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}).$$

Notamos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0,$$

es decir la ausencia de cargas magnéticas es consecuencia de Biot-Savart.

.18

2.4. Ley de Ampère

Otra consecuencia de la ley de Biot-Savart es la ley de Ampère: en régimen estacionario,

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_o \vec{j}(\vec{r})}.$$

.19

Ejemplos: calculos de $\vec{B}$ usando Ley de Ampère

- Alambre infinito
- Solenoide

.20

3. Materiales magnéticos

- Materia = átomos, con e- en movimientos orbitales $\approx$ corrientes microscópicas, y con “espines” $\approx$ dipolos magnéticos microscópicos $\vec{\mu}$.
- ¿Cuál es la interacción entre la asamblea de corrientes $\vec{\mu}$ con un campo externo?
- ¿Qué se puede inferir de la estructura de la materia en base a su interacción magnética?

.21

Veremos existen 3 tipos de propiedades magnéticas:

- Materiales diamagnéticos: no poseen dipolos magnéticos $\vec{\mu}$ permanentes. Su acoplamiento con $\vec{B}$ es débil. Ejemplos: vidrio o cobre.
- Materiales paramagnéticos: tienen dipolos magnéticos $\vec{\mu}$ permanentes. Su acoplamiento con $\vec{B}$ es más fuerte que en el diamagnetismo. Ejemplos: oxígeno, titanio.
- Materiales ferromagnéticos: tienen dipolos permanentes con comportamiento colectivo ordenado. Su acoplamiento con $\vec{B}$ es el más fuerte. Ejemplos: Fe, Co, Ni.

.22

3.1. Momentos magnéticos microscópicos

- Vimos que para corrientes macroscópicas cerradas, $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$, $\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$, con $\vec{m} = I\vec{S}$ momento dipolar magnético.
- Para entender las propiedades magnéticas de la materia estudiaremos el origen de los dipolos microscópicos.

.23

Corrientes microscópicas: movimientos orbitales

- En el átomo de Bohr los e- tienen órbitas circulares, con velocidad v .
- La intensidad de corriente en este circuito es $-e \frac{v}{2\pi r}$.
- El dipolo microscópico $\vec{\mu}$ correspondiente a esta corriente es

$$\mu = -e \frac{v}{2\pi r} \pi r^2 = -\frac{e}{2} \frac{mvr}{m} \Rightarrow \boxed{\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L}},$$

en que $\vec{L}$ es el momentum angular orbital.

- Resulta de mecánica cuántica que $L_z = n\hbar$, con $\hbar = \frac{1}{2\pi} 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

.24

Corrientes microscópicas: espines

- Protones, neutrones y electrones giran en torno a un eje propio. A esta rotación se le llama *spin*, como la Tierra tiene *spin*.
- El momento magnético asociado es

$$\vec{\mu} = 2,002319 \frac{q}{2m} \vec{S}, \text{ con } S_z = \frac{n\hbar}{2}.$$

- Notar que si bien el neutrón no tiene carga neta, si tiene $\vec{\mu}$ ($\sim$ como si tuviese una carga negativa).

.25

Corrientes microscópicas: factor de Landé

En general ponemos

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2m} \vec{L},$$

en que g es el factor de Landé:

- $g = 1$ para mov. orbital
- $g \approx 2$ para spin.

.26

3.2. Campo $\vec{B}$ producido por un dipolo.

- Para modelar las propiedades magnéticas de la materia es necesario calcular el campo $\vec{B}$ producido por los dipolos microscópicos. Trabajamos con un dipolo magnético macroscópico.
- Para un circuito finito, tomamos la referencia de $\vec{A}$ en ∞ :

$$\vec{A}(\vec{r}_\infty) = 0 \text{ si } \|\vec{r}_\infty\| \rightarrow \infty,$$

y si usamos el *gauge* $\vec{\nabla} \Lambda = 0$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

- Demostraremos que el campo $\vec{A}$ producido por un dipolo $\vec{m}$ en el origen de coordenadas es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$

.27

Cálculo de $\vec{A}$ para un dipolo

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'.$$

Para un circuito $d\mathcal{V}' = \mathcal{S} dl'$, en que $\mathcal{S}$ es la sección del circuito y $dl' = \|d\vec{r}'\|$.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ con } I = j\mathcal{S}.$$

Colocamos el 'circuito' cerca del origen, de manera que $\|\vec{r}'\| \ll \|\vec{r}\|$, es decir consideramos un circuito infinitesimal o bien tomamos $r \rightarrow \infty$. Entonces,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \right) \text{ (tarea).}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} d\vec{r}'.$$

.28

Para seguir usamos que (ver demo en clase):

$$\int (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{r}' = \frac{1}{2} \int (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r}, \text{ entonces,}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_o I}{4\pi} \oint \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} d\vec{r}' = \frac{\mu_o}{4\pi} I \oint \overbrace{\frac{1}{2} (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r}}^{\vec{m}} \\ &\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

Para un circuito cerrado circular,

$$m = \frac{I}{2} \int_0^{2\pi} r' r' d\theta = \pi (r')^2 I,$$

consistente con la definición anterior de $\vec{m}$.

.29

Cálculo de $\vec{B}$ para un dipolo

Si el dipolo $\vec{m}$ está en $\vec{r}' \neq 0$,

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Ahora calculamos $\vec{B}$ con

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right).$$

Es directo demostrar que para un dipolo $\vec{B}$ también se puede expresar en términos de un gradiente:

$$\vec{B} = -\mu_o \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}, \text{ con } \phi_{\text{dip}} = \frac{\vec{m}}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

.30

3.3. Magnetización

En un continuo de dipolos microscópicos, el momento dipolar magnético asociado a un elemento de volumen $d\mathcal{V}'$ centrado en $\vec{r}'$ es

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}') d\mathcal{V}',$$

en que $\vec{M}$ es la magnetización.

Calculamos el campo $\vec{A}$ producido por $\vec{M}$:

$$\begin{aligned}\vec{A}_M &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \times \vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \vec{M} \times \vec{\nabla}' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' - \frac{\mu_o}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' + \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}\end{aligned}$$

.31

Corrientes de magnetización

Reescribimos la ultima expresión,

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' + \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

introduciendo una densidad de corriente $\vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ y una densidad de corriente superficial $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{S}'$ que dan origen al primer y segundo término en $\vec{A}$:

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_M(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' + \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{K}_M}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS'.$$

Vemos que el campo $\vec{A}$ producido por material con magnetización $\vec{M}$ es el debido a unas “corrientes de magnetización” $\vec{j}_M$ y $\vec{K}_M$.

⇒ magnetización $\Leftrightarrow$ corrientes microscópicas

.32

Campo magnético de magnetización

Para calcular $\vec{B}_M$ correspondiente a $\vec{A}_M$ volvemos a $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, con

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' \\ \Rightarrow \vec{B} &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left[\vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] d\mathcal{V}'.\end{aligned}$$

Se demuestra que

$$\vec{B} = \mu_o \vec{M} - \mu_o \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}, \text{ con } \phi_{\text{dip}} = \int \vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}'.$$

.33

3.4. Campo $\vec{H}$

En presencia de corrientes macroscópicas (i.e. corrientes de conducción),

$$\vec{B} = \vec{B}_M + \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_l(\vec{r}') \times \vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV',$$

en que $\vec{B}_M = \mu_o \vec{M} - \mu_o \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}$ es la contribución a $\vec{B}$ debida a las corrientes microscópicas. $\vec{B}$ se suele escribir

$$\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M}), \text{ donde}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_l \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' - \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}.$$

$\vec{H}$ se llama campo de intensidad magnética.

.34

Campo $\vec{H}$ y ley de Ampère.

Volvamos a la ley de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{j}_T, \text{ en que } \vec{j}_T = \vec{j}_l + \vec{j}_M, \text{ con } \vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}.$$

Hemos particularizado al caso en que no hay corrientes de superficies, i.e. no hay discontinuidades o bordes. Veremos el caso de condiciones de borde en magnetostática más adelante.

$$\text{Sustitución de } \vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M}) \text{ da } \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_l}.$$

Se justifica entonces que $\vec{H}$ es la variable básica en presencia de materiales con magnetización, ya que el experimentador sólo controla a $\vec{j}_l$ y no a $\vec{j}_M$.

.35

3.5. Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

En general resulta que en “materiales lineales” y isotrópicos,

$$\vec{M}(\vec{r}) \approx \frac{\chi_B}{\mu_B} \vec{H}(\vec{r}).$$

Vimos que la materia contiene dipolos microscópicos, con momentos del tipo

$$\vec{m} = \frac{-e}{2m} \sum_i \vec{L}_i,$$

más la contribución de spin.

.36

Diamagnetismo

Para materiales diamagnéticos, $\vec{m} = 0$, i.e. no hay dipolos magnéticos microscópicos permanentes. Este es el caso de gases nobles, con capas electrónicas llenas. Pero si aplicamos $\vec{B}$ aparece un momento inducido - para verlo consideremos el modelo de Bohr. La ecuación de movimiento del electrón es

$$m\omega_o^2 r = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_o r^2} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{Ze}{4\pi\epsilon_o m r^3}}.$$

Si aplicamos $\vec{B}$ perpendicular al circuito, en dirección positiva hay una fuerza adicional en dirección al núcleo:

$$m_o\omega^2 r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o r^2} + e\omega r B,$$

si el electrón permanece en una órbita circular (se resuelve ecuación cuadrática en ω).

$$\Rightarrow \omega \approx \omega_o + \frac{\overbrace{eB}^{\omega_L}}{2m}.$$

.37

Entonces tenemos que si $\vec{B}$ apunta en dirección de $\vec{L}$, $\omega \approx \omega_o + \omega_L$, mientras que si $\vec{B}$ apunta en dirección contraria a $\vec{L}$, $\omega \approx \omega_o - \omega_L$. En ambos casos el efecto de $\vec{B}$ es agregar momentum angular a $\vec{L}$ en dirección de $\vec{B}$.

$$\Rightarrow |m_{\text{inducido}}| = \frac{e}{2m} (m_e \omega_L r^2) = \frac{e^2 r^2}{4m} \|\vec{B}\|.$$

Un cálculo más preciso, promediando sobre los radios orbitales de Z e- , da

$$\vec{m}_{\text{inducido}} = -\frac{e^2}{6m} Z r_o^2 \vec{B}, \text{ en que } r_o^2 = \langle r^2 \rangle.$$

La magnetización es entonces

$$\vec{M} = - \underbrace{(Ne^2 Z r_o^2 / (6m_e))}_{\chi_B / \mu_o < 0} \vec{B}.$$

.38

Paramagnetismo

En el caso de materiales magnéticos con momento dipolar permanente seguimos un tratamiento estadístico,

$$\vec{M} = \frac{Nm^2}{3kT} \vec{B}.$$

Tomando en cuenta el efecto diamagnético,

$$\vec{M} = N \left\{ \frac{m^2}{3kT} - \frac{e^2 Z r_o^2}{6m_e} \right\} \vec{B} = \frac{\chi_B}{\mu_o} \vec{B}.$$

Como $\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$,

$$\vec{B} - \chi_B \vec{B} = \mu_o \vec{H} \Leftrightarrow \vec{B} = \mu \mu_o \vec{H}, \text{ con } \mu = 1/(1 - \chi_B).$$

Notar que existen distintas definiciones de χ_B y μ en los textos. También se puede ver que una medición experimental de μ permite estimar r_o .

.39

Ferromagnetismo

Es parecido al paramagnetismo, pero hay un fenómeno de interacción colectiva que ordena los dipolos permanentes. Para materiales ferromagnéticos, $\mu \sim 1000$.

.40

Condiciones de borde

Las condiciones de continuidad de $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en una discontinuidad plana entre dos medio materiales con permitividades μ_1 y μ_2 son las siguientes. $\perp$ y $\parallel$ se refieren al plano de la discontinuidad. En ausencia de corrientes libres,

- $B_{\perp}$ es continuo. Deriva de $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0$.
- $H_{\parallel}$ es continuo. Deriva de $\int \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int \vec{j}_l \cdot d\vec{S} = 0$.

.41