Electromagnetismo

Simon Casassus Astronomía, Universidad de Chile
http:://www.das.uchile.cl/∼simon

I Electrostática

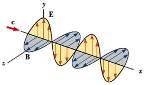
II Magnetostática

III Inducción y ondas electromagnéticas.

Parte III

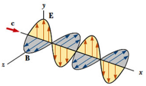
Inducción y ondas electromagnéticas

1. **Inducción electromagnética**
2. **Energía magnética**
3. **Circuitos**
4. **Ecuaciones de Maxwell**
5. **Radiación**



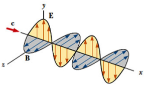
Inducción y ondas electromagnéticas

Consideramos el caso de corrientes variables. Cuando I cambia se generan variaciones temporales en $\vec{B}$, que resultan en campos eléctricos inducidos.



Outline

1. **Inducción electromagnética**
   - Fuerza electromotriz inducida y ley de Faraday
   - Inductancia
2. **Energía magnética**
   - Energía almacenada en inductores
   - Energía magnética en un sistema de circuitos
   - Energía magnética en materiales
3. **Circuitos**
   - Elementos
   - Circuitos R, L, C
4. **Ecuaciones de Maxwell**
   - Corriente de desplazamiento
   - Ecuaciones de Maxwell
5. **Radiación**
   - Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting
   - Ondas electromagnéticas

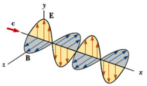


1.1-f.e.m.

La fuerza electromotriz entre los bornes A y B de una batería es

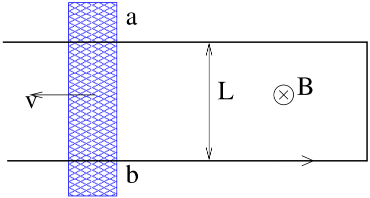
$$\textbf{fem} = V = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

En una situación estacionaria, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Veremos casos de *fem* $\neq 0$ para circuitos cerrados.



f.e.m. mocional, ejemplo 1

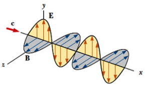
Consideremos el siguiente dispositivo experimental:



Los e- en la barra (azul) sufren $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ en dirección $b \rightarrow a$. Cuando los e- llegan a a, no se acumulan ahí mismo, sino que son conducidos de a hacia b completando un circuito con corriente I.
Tenemos $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = qvBL \neq 0$, y la **fem** es

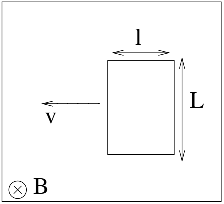
$$\textbf{fem} \equiv \epsilon = \frac{1}{q} \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = vBL, \text{ con } I = \epsilon/R = vBL/R.$$

Esto es un ejemplo de **fem** mocional porque hay partes en movimiento en el circuito.



f.e.m. mocional, ejemplo 2

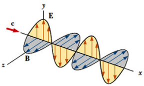
Consideremos un circuito rígido rectangular que atraviesa una región de $\vec{B}$ constante, entrando en $t = 0$.



Si x es la coordenada del brazo delantero en dirección del movimiento, vemos que

$$\epsilon = BLv = BL\frac{dx}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \;\Rightarrow\; \epsilon = \frac{d\phi}{dt},$$

en que ϕ es el flujo del campo magnético. Esto nos lleva a enunciar la Ley de Faraday.

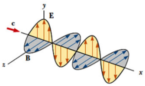


Ley de Faraday

Resulta experimentalmente que siempre que cambia el flujo magnético a través de un circuito se induce una **fem**:

$$\epsilon = \textbf{fem} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

La dirección de la corriente inducida es tal que produce un campo $\vec{B}$ cuyo flujo por el circuito tiende a oponerse al cambio externo, i.e. tiende a mantener el flujo de $\vec{B}$ constante.



Ejemplos de inducción

- $\vec{B}$ variable en circuito circular plano.
- Lector/grabador de cinta magnética y disco duro.

Forma diferencial de la Ley de Faraday

De la Ley de Faraday,

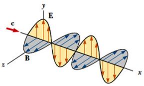
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \;\Rightarrow\; \int_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S},$$

para cualquier superficie $\mathcal{S}$ y su contorno $\Gamma \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$.

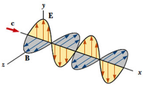
Notamos que $\vec{E}$ no es conservativo cuando hay dependencia en $t \Rightarrow$ $\vec{E}$ deriva de algo más que sólo un $\vec{\nabla}\phi$. Recordamos que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, de manera que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \;\Leftrightarrow\; \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0,$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi}.$$



Outline



Inducción electromagnética
Fuerza electromotriz inducida y ley de Faraday
Inductancia
Energía magnética
Energía almacenada en inductores
Energía magnética en un sistema de circuitos
Energía magnética en materiales
Circuitos
Elementos
Circuitos R, L, C
Ecuaciones de Maxwell
Corriente de desplazamiento
Ecuaciones de Maxwell
Radiación
Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting
Ondas electromagnéticas

1.2-Inductancia a: Autoinducción del solenoide

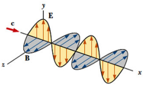
Consideremos un solenoide de largo h, con intensidad de corriente I variable y n vueltas por u. de largo. $B = \mu_\circ n I$ en cualquier punto dentro del solenoide.

$$\Rightarrow \phi = \mu_\circ n I \pi r^2 n h.$$

Si cambia I existe una **fem** inducida ϵ:

$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu_\circ n^2 \pi r^2 h \frac{dI}{dt} \Leftrightarrow \epsilon = -L\frac{dI}{dt},$$

donde $L = \mu_\circ n^2 \pi r^2 h$ es la autoinducción del solenoide, con unidades de “Henry” (símbolo H en S.I.), y valores de $\sim$mH.

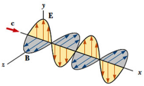


1.2-Inductancia b: Autoinducción de cualquier circuito.

Para cualquier circuito cerrado,

$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dI}\frac{dI}{dt} \Rightarrow \epsilon = -L\frac{dI}{dt}, \text{ con } L \equiv \frac{d\phi}{dt}.$$

Si además $\phi \propto I$, entonces $L = \phi/I$.



1.2-Inductancia c: Inductancia mútua.

Consideremos dos solenoides S_1 y S_2, enrollados sobre el mismo cilindro de largo h. Sea ϕ_2 el flujo de B_1 a través de S_2. Tenemos una **fem** V_2 en los bornes de S_2,

$$V_2 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\phi_2}{dt}, \text{ generada por el campo } B_1 \text{ de } S_1.$$

$$V_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt}, \text{ con } M_{12} = \mu_\circ n_1 n_2 h\pi r^2, \text{recíprocamente,}$$

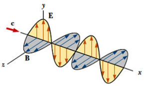
$$V_1 = -M_{21}\frac{dI_2}{dt}, \text{ con } M_{21} = \mu_\circ n_2 n_1 h\pi r^2 \Rightarrow M_{12} = M_{21} = M.$$

M es la inductancia mútua de los dos circuitos. En general,

$$V_2 = -\frac{d\phi_2}{dI_1}\frac{dI_1}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}.$$

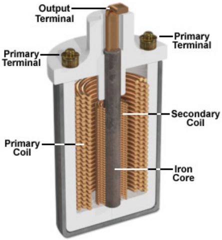
Vemos que para los solenoides

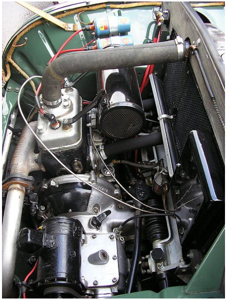
$$L_1 = \mu_\circ n_1^2 h\pi r^2, \; L_2 = \mu_\circ n_2^2 h\pi r^2 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2}$$

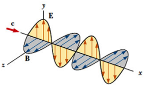


Ejemplo inductancia mútua

El circuito de encendido de auto es un ejemplo familiar de inductancia mútua con 2 solenoides, uno de $\sim$ 16000 vueltas, otro de $\sim$ 400, con radio de 3 cm y largo 10 cm. Pasan 3 A por el primer solenoide, en $\sim 10^{-4}$ s, de manera a generar $V_2 = -M_{12} dI_1/dt$, suficientemente grande para provocar una chispa en las bugías.

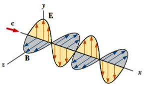






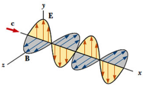
2-Energía magnética

- Energía elctrostática: energía requerida para un arreglo de cargas eléctricas.
- Energía magnética: energía requerida para un arreglo de corrientes.

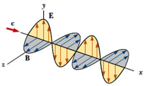


Outline

1. **Inducción electromagnética**
   - Fuerza electromotriz inducida y ley de Faraday
   - Inductancia
2. **Energía magnética**
   - Energía almacenada en inductores
   - Energía magnética en un sistema de circuitos
   - Energía magnética en materiales
3. **Circuitos**
   - Elementos
   - Circuitos R, L, C
4. **Ecuaciones de Maxwell**
   - Corriente de desplazamiento
   - Ecuaciones de Maxwell
5. **Radiación**
   - Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting
   - Ondas electromagnéticas



2.1-Energía almacenada en inductores

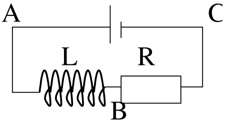


Inductor: algún dispositivo eléctrico tal que $V_L = -LdI/dt$, en que $V_L = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$.
Convención de signos:

- **fems**:
  - baterías: $V_\epsilon = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_+ - \varphi_- = \epsilon$.
  - Una vez establecido el sentido positivo de la corriente, de $+$ a $-$, definimos el signo para inductores: $V_L = -LdI/dt$.
- elementos: resistencias, condensadores: $V = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi_+ - \varphi_-(= RI)$, con $\varphi_+ > \varphi_-$.

Energía almacenada en inductores

Para el circuito L, R,

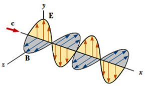


$$\epsilon + V_L = V_R \Leftrightarrow \epsilon = L\frac{dI}{dt} + RI, \text{ ecuación del circuito.}$$

El trabajo requerido de la batería para levantar una corriente I en el tiempo T, con $I = 0$ en $t = 0$, es $W = \int \delta W$, con $\delta W = \epsilon dQ$, en que dQ es un elto de carga eléctrica que va de A a C.

$$\Rightarrow dW = \epsilon \frac{dq}{dt} dt = \epsilon I dt.$$

$$\Rightarrow W = \int_0^T \epsilon I dt = L \int_0^T I \frac{dI}{dt} dt + R \int_0^T I^2 dt.$$



Energía almacenada en inductores

Tenemos entonces el trabajo W necesario para levantar la corriente I en el tiempo T:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 + R\int_0^T I^2 dt,$$

en que el segundo término es la ernergía disipada en la resistencia ($= \int Pdt$, con $P = RI^2$).

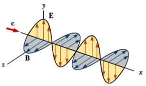
Si en un tiempo $t > T$ hacemos corto circuito sacando la batería,

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0 \;\Rightarrow\; I = I_T \exp(-\frac{R}{L}(t - T)).$$

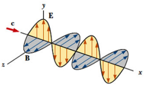
Se puede verificar (tarea) que

$$\int_T^\infty P_R dt = \int_T^\infty RI^2(t)dt = \frac{1}{2}LI^2.$$

$\Rightarrow$ la energía disipada es igual a la energía almacenada en el inductor, por lo tanto se puede ver como energía almacenada reversiblemente en el campo magnético creado por $I(t)$.



Outline



2.2-Energía magnética en un sistema de circuitos

Consideremos n circuitos estacionarios con intensidades $\{I_i(t)\}$, con flujo magnético ϕ_i a través del i-esimo circuito. La potencia que debe ejercer la batería que genera la corriente I_i contra las **fem**s inducidas es

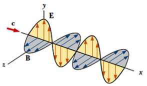
$$P_i = dW_i/dt = V_i dq_i/dt = V_i I_i = I_i d\phi_i/dt,$$

en que la diferencia de potencial que provee la batería es $V_i = -\epsilon = d\phi_i/dt$.
En un tiempo dt, el trabajo ejercido por todas las baterías contra las **fem**s inducidas es

$$dW = \sum_i^n I_i \frac{d\phi_i}{dt} dt, \text{ en ausencia de resitencias disipativas.}$$

La energía magnética es entonces

$$U = \int dW = \sum_i \int I_i (d\phi_i/dt) dt.$$



Energía magnética en un sistema de circuitos

Sabemos que la energía magnética almacenada en inductores en el tiempo T es independiente del detalle de $I_i(t)$. Supongamos que las corrientes se incrementan linealmente:

$$I_i = I_i(T)t/T.$$

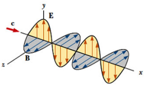
Si las inductancias son lineales en I_i, $\phi_i(t) = \phi_i(T)t/T \;\Rightarrow$

$$U = \sum_i \int I_i \frac{d\phi_i}{dt}dt = \sum \frac{I_i(T)\phi_i(T)}{T^2}\int_0^T tdt = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i(T)\phi_i(T),$$

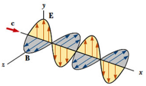
y como

$$\phi_i(T) = L_i I_i(T) + \sum_{j\neq i} M_{ij} I_j(T),$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i I_i^2(T) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j\neq i} M_{ij} I_i(T) I_j(T).$$



Outline



Inducción electromagnética
Fuerza electromotriz inducida y ley de Faraday
Inductancia
Energía magnética
Energía almacenada en inductores
Energía magnética en un sistema de circuitos
Energía magnética en materiales
Circuitos
Elementos
Circuitos R, L, C
Ecuaciones de Maxwell
Corriente de desplazamiento
Ecuaciones de Maxwell
Radiación
Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting
Ondas electromagnéticas

2.3-Energía magnética en materiales. Ejemplo.

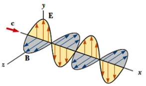
Consideremos la energía magnética almacenada en un solenoide vacío:

$$B = \mu_\circ n I, \quad H = n I,$$

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_\circ n^2 \pi r^2 h I^2 = \frac{1}{2} B H \underbrace{\mathcal{V}}_{\pi r^2 h}.$$

Como B y H son uniformes, definimos una densidad de energía magnética

$$u = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_\circ} \text{ si } \mu = 1.$$



Energía magnética en materiales. Medios no lineales.

$u = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$ no es válida en casos no-lineales (como ferromagnetismo). En estos casos volvemos al trabajo ejercido por una batería para levantar una corriente I:

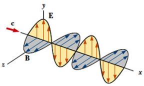
$$dW_b = Vdq = VIdt,$$

con $V = d\phi/dt$ para tomar en cuenta sólo el trabajo de las **fems** de inducción. Escribimos $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{S}}$ en que $\mathcal{S}$ es cualquier superficie cuyo perimetro es el circuito, y tenemos

$$dW_b = \int_{\mathcal{V}} \vec{H} \cdot d\vec{B} d\mathcal{V} \text{ (ver demo en clase).}$$

El trabajo requerido de la batería para lleguar a un campo final $\vec{B}_\circ$ es

$$W_b = \int_{\mathcal{V}} \int_0^{B_\circ} \vec{H} \cdot d\vec{B} d\mathcal{V}.$$



Energía magnética en materiales. Medios no lineales.

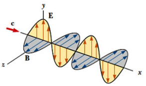
Entonces la energía almacenada en los inductores es

$$W_b = \int_{\mathcal{V}} \int_0^{B_\circ} \vec{H} \cdot d\vec{B} d\mathcal{V}.$$

Cuando reducimos el campo $B_\circ$ a 0, recuperamos la energía magnética si $\vec{H}(\vec{B})$ es univaluada. Pero en el caso de Fe no se recupera toda la energía, ya que

$$\int_0^{B_\circ} \vec{H} \cdot d\vec{B} \neq - \int_{B_\circ}^{0} \vec{H} \cdot d\vec{B}.$$

La diferencia, que se disipa en calor, es igual al área contenida en una curva de histéresis. El Fe tiene una curva de histéresis con menor area que el acero, por ejemplo. Por lo tanto es más conveniente usar Fe para construir transformadores.



Energía magnética en materiales. Expresión general densidad de enegía magnética en medios lineales.

Probaremos que $\boxed{u = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$. Consideremos el conjunto de corrientes $\{I_i\}_{i=1}^{n}$. El flujo por el i-ésimo circuito es $\phi_i = \int_{\mathcal{S}_i} \vec{B}\cdot d\mathcal{S}$, con $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$. Entonces

$$\phi_i = \int_{\mathcal{S}_i} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{\mathcal{S}} = \oint_{\Gamma_i} \vec{A}\cdot d\vec{s}.$$

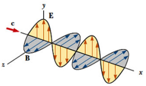
Usando que $U = 1/2\sum_{i=1}^{n} I_{\circ,i}\phi_{\circ,i}$, para el tiempo $t_\circ$, tenemos

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\oint_{\Gamma_i}\vec{A}\cdot(I_i d\vec{s}) = \int \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{j}_l d\mathcal{V},$$

donde pasamos a una integral de volumen en todo el espacio usando que $j_l = 0$ afuera de los circuitos. Usando la ley de Ampère, $\vec{j}_l = \vec{\nabla}\times\vec{H}$,

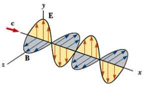
$$U = \frac{1}{2}\int \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})d\mathcal{V} = \frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})d\mathcal{V} - \frac{1}{2}\int \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})d\mathcal{V},$$

o sea $U = \frac{1}{2}\int \vec{H}\cdot\vec{B}d\mathcal{V}$, ya que $\int_\infty (\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\mathcal{S} = 0$.

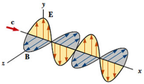


3-Circuitos

Queremos determinar las corrientes en circuitos R, L, C dado un voltaje aplicado. Por el teorema de Fourier, toda función $V(t)$ se puede descomponer en $\sin(t)$ y $\cos(t)$, $\Rightarrow$ estudiaremos $V(t)$ sinusoidal.



Outline

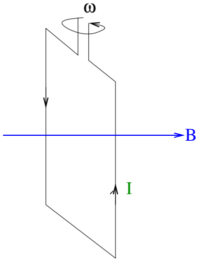


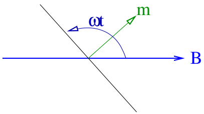
3.1-Elementos:Generadores

La potencia generada es

$$\frac{dW}{dt} = V\frac{dq}{dt} = VI.$$

Para un generador de corriente alterna (i.e. una dínamo), la potencia eléctrica deriva de potencia mecánica:

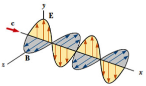




$$\phi = Ba^2 \sin(\omega t) \;\Rightarrow\; V = -\frac{d\phi}{dt} = -\omega Ba^2 \cos(\omega t).$$

El trabajo mecánico requerido deriva del torque,

$$P_m = \omega\Gamma = \omega|\vec{B} \times \vec{m}| = \omega Ba^2 I \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$



3.1 Elementos básicos

- R:

$$V = RI$$

- C:

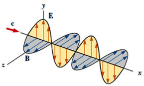
$$V = Q/C \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{I}{C}$$

- L (es **fem**):

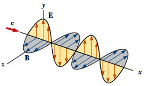
$$V = -L\frac{dI}{dt}$$

Se suele usar la notación compleja para V y I:

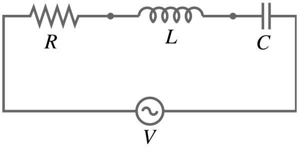
$$V = \mathrm{Re}\left\{ V_\circ \exp(j\omega t) \right\}$$



Outline



3.2- Circuitos R, L, C



$$V_R + V_C = V + V_L \;\Leftrightarrow\; RI + \frac{Q}{C} = V - L\frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

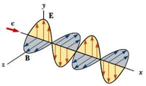
$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}, \text{ ecuación del circuito.} \qquad (1)$$

Si $V \propto \exp(j\omega t)$, $I \propto \exp(j\omega t)$, y

$$-\omega^2 LI + Rj\omega I + \frac{I}{C} = j\omega V,$$

o sea $IZ = V$, con

$$Z = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}, \text{ en que } Z \text{ es la impedancia del circuito.}$$



3.2- Circuitos R, L, C

La solución general de la ecuación de circuito, Ec. 1, es

$$I = \left\{ \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - j \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right\} V_\circ \exp(j\omega t).$$

La potencia disipada en R es $P_R = RI^2$, y tomando promedio temporal[1] (tarea)

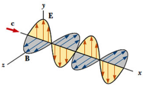
$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} |Z| \cos(\theta) I_\circ^2, \text{ con } \cos(\theta) = \frac{R}{Z},$$

donde θ es el argumento de la impedancia compleja Z, $I_\circ = V_\circ / Z$. La potencia promedio también se puede escribir como

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} V_\circ \frac{R}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]},$$

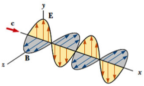
destacando la resonancia (el peak en P_R) en $\omega_\circ = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, y con un FWHM $\Delta\omega = R/C$ (tarea).

[1] $\langle \cdots \rangle = \text{lím} \frac{1}{T} \int_0^T dt \cdots$



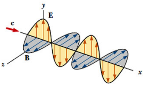
4- Ecuaciones de Maxwell

En esta sección completamos el conjunto de las ecuaciones que definen los campos $\vec{E}(t)$ y $\vec{B}(t)$.



Outline

1. **Inducción electromagnética**
   - Fuerza electromotriz inducida y ley de Faraday
   - Inductancia
2. **Energía magnética**
   - Energía almacenada en inductores
   - Energía magnética en un sistema de circuitos
   - Energía magnética en materiales
3. **Circuitos**
   - Elementos
   - Circuitos R, L, C
4. **Ecuaciones de Maxwell**
   - Corriente de desplazamiento
   - Ecuaciones de Maxwell
5. **Radiación**
   - Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting
   - Ondas electromagnéticas



Inducción electromagnética
Fuerza electromotriz inducida y ley de Faraday
Inductancia
Energía magnética
Energía almacenada en inductores
Energía magnética en un sistema de circuitos
Energía magnética en materiales
Circuitos
Elementos
Circuitos R, L, C
Ecuaciones de Maxwell
Corriente de desplazamiento
Ecuaciones de Maxwell
Radiación
Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting
Ondas electromagnéticas

4.1- Corriente de desplazamiento

Vimos que la conservación de carga eléctrica se escribe localmente como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \text{ ecuación de continuidad.} \qquad (2)$$

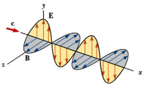
Veamos que la Ec. 2 revela una inconsistencia con la Ley de Ampère,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_\circ \vec{j}. \qquad (3)$$

Tomando la divergencia de la Ec. 3, tenemos

$$0 = \mu_\circ \vec{\nabla} \cdot \vec{j},$$

tenemos una contradicción con la ecuación de continuidad si $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$. Claramente hay que corregir la Ley de Ampère para situación dinámicas (con dependencia en t).



Corriente de desplazamiento

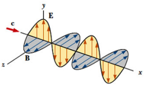
Volvamos a la Ley de Gauss,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot(\epsilon_\circ\vec{E}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} \;\Leftrightarrow$$

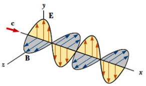
$$\vec{\nabla}\cdot\epsilon_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\epsilon_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}.$$

Vemos que podemos arreglar la Ley de Ampère sumandole una término adicional de densidad de corriente, la “corriente de desplazamiento” $\boxed{\epsilon_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$:

$$\frac{1}{\mu_\circ}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{j} + \underbrace{\epsilon_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\text{corriente de desplazamiento}}.$$



Outline



4.2- Ecuaciones de Maxwell. Vacío.

En resumen, el set completo de ecuaciónes de Maxwell que determinan el campo electromagnético es

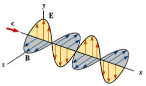
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_\circ}, \text{ Gauss,} \tag{4}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \text{ ausencia de monopólos magnéticos,} \tag{5}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \text{ Faraday,} \tag{6}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_\circ\vec{j} + \mu_\circ\epsilon_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \text{ Ampère-Maxwell,} \tag{7}$$

Este set de ecuaciones es válido “en vacío” - o sea se aplica a todas las circunstancias en que no hay un medio material cuya influencia se implementa mediante un promedio macroscópico.



Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

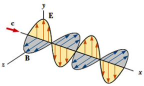
En medios materiales tomamos en cuenta las corrientes microscópicas con $\vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ para medios magnéticos. Además existe una densidad de carga de polarización, $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$.
Veamos que en una situación no-estática existe también una corriente de polarización , $\vec{j}_P = \frac{\partial P}{\partial t}$. Apliquemos continuidad de carga, en ausencia de cargas libres,

$$\frac{dQ_P}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho_P d\mathcal{V} = -\frac{d}{dt}\int \vec{\nabla}\cdot\vec{P} d\mathcal{V} = -\int \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\cdot d\vec{\mathcal{S}}.$$

$\Rightarrow$ existe una densidad de corriente de polarización $\vec{j}_P = \frac{\partial P}{\partial t}$.
Entonces la corriente total se escribe,

$$\vec{j} = \vec{j}_M + \vec{j}_P + \vec{j}_l, \text{ con } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0,$$

$$\text{y } \frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_P = 0, \text{ y } \frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_l = 0, \text{ y } \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_M = 0.$$



Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

tomando en cuenta todas las fuentes de carga y corrientes, la ecuación de Ampère-Maxwell se escribe

$$\frac{1}{\mu_\circ}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{j}_M + \vec{j}_P + \vec{j}_l + \epsilon_\circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

con $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_\circ} - \vec{M}$ y $\vec{D} = \epsilon_\circ \vec{E} + \vec{P}$, lleguamos a

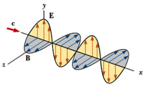
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{\rho_l}{\epsilon_\circ}, \tag{8}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{9}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{10}$$

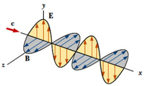
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{11}$$

Para medios lineales, $\vec{D} = \epsilon\epsilon_\circ \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu\mu_\circ \vec{H}$.

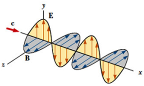


5-Radiación

Veremos que las ecuaciones de Maxwell describen un fenómeno ondulatorio de transporte de energía electromagnética. Para longitudes de onda del orden de 4000-8000 Å, estas ondas se identifican con luz visible.



Outline



Inducción electromagnética
Fuerza electromotriz inducida y ley de Faraday
Inductancia
Energía magnética
Energía almacenada en inductores
Energía magnética en un sistema de circuitos
Energía magnética en materiales
Circuitos
Elementos
Circuitos R, L, C
Ecuaciones de Maxwell
Corriente de desplazamiento
Ecuaciones de Maxwell
Radiación
Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting
Ondas electromagnéticas

5.1-Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting

Combinamos las ecuaciones de Maxwell Ec. 11 y Ec. 10:
$\vec{E}\cdot$(Ec. 11)$+\vec{H}\cdot$(Ec 10):

$$
\begin{array}{rrl}
 & \vec{E}\cdot & \left[\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{H} - \vec{j}_l\right] \\
\bigoplus & \vec{H}\cdot & \left[\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}\right],
\end{array}
$$

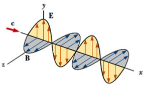
$$
\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad = \quad \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) - \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot\vec{j}_l.
$$

Y usamos las relación vectorial

$$
\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\vec{H} - (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\vec{E},
$$

para llegar a

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right] = -\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \vec{E}\cdot\vec{j}_l..
$$



Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting

Reescribimos la Ec. 47,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right]=-\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})-\vec{E}\cdot\vec{j}_l,$$

identificando las densidades de energías eléctricas y magnéticas, $\boxed{u=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}}$,

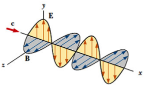
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=-\vec{j}_l\cdot\vec{E},\ \text{con}\ \boxed{\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}}\ \textbf{vector de Poynting}. \tag{12}$$

Veamos que la Ec. 12 es la ecuación de continuidad para la densidad de energía u. El término $\vec{j}_l\cdot\vec{E}$ es la potencia ejercidad por $\vec{E}$, $\vec{B}$ por unidad de volumen: la fuerza de Lorentz ejercida en un volumen $d\mathcal{V}$ es

$$d\vec{F}=\rho_l d\mathcal{V}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}),$$

donde $\vec{v}(\vec{r})$ es la velocidad del fluido de cargas libre. La potencia asociada a $d\vec{F}$ es

$$dP=\vec{v}\cdot d\vec{F}=\vec{v}\rho_l d\mathcal{V}\cdot\vec{E}\ \Rightarrow\ \frac{dP}{d\mathcal{V}}=\vec{j}_l\cdot\vec{E},\ \text{ya que}\ \vec{j}_l=\rho_l\vec{v}.$$

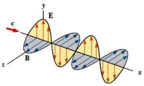


Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting

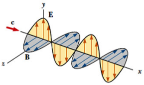
Integrando la Ec. 12 en un volumen $\mathcal{V}$,

$$\int d\mathcal{V}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=-\vec{j}_l\cdot\vec{E}\right\},$$

$$\underbrace{\int\frac{\partial u}{\partial t}d\mathcal{V}}_{\frac{dU}{dt}\text{,variación de energía EM}} = -\underbrace{\int\vec{S}\cdot d\vec{\mathcal{S}}}_{\text{flujo de energía}} - \underbrace{\int\vec{j}_l\cdot\vec{E}d\mathcal{V}}_{\text{potencia disipada en las cargas}}.$$



Outline



Inducción electromagnética
Fuerza electromotriz inducida y ley de Faraday
Inductancia
Energía magnética
Energía almacenada en inductores
Energía magnética en un sistema de circuitos
Energía magnética en materiales
Circuitos
Elementos
Circuitos R, L, C
Ecuaciones de Maxwell
Corriente de desplazamiento
Ecuaciones de Maxwell
Radiación
Densidad de energía electromagnética, vector de Poynting
Ondas electromagnéticas

5.2-Ondas electromagnéticas. Vacío

Veamos que las ecuaciones de Maxwell dan lugar a una ecuación de ondas para $\vec{E}$ y $\vec{B}$. En el vacío, teníamos

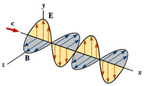
$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{ Faraday, Ec. 6,} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_\circ \vec{j} + \mu_\circ \epsilon_\circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ Ampère-Maxwell, Ec. 7}
\end{aligned}
$$

Tomando $\vec{\nabla} \cdot (\mathrm{Ec.}\ 7)$, y en ausencia de cargas y corrientes,

$$
\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}} = \epsilon_\circ \mu_\circ \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\epsilon_\circ \mu_\circ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
$$

$$
\Rightarrow \nabla^2 \vec{B} - \epsilon_\circ \mu_\circ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0,
$$

y reconocemos una ecuación de ondas para $\vec{B}$, con velocidad de propagación $c = 1/\sqrt{\epsilon_\circ \mu_\circ}$.
$\vec{E}$ satisface la misma ecuación (tarea).

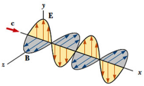


5.2-Ondas electromagnéticas. Medios lineales y aislantes

El desarrollo es idéntico al caso vacío:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\epsilon_\circ \mu\mu_\circ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ (tarea)}$$

$\Rightarrow c = c_\circ / n$, donde $c_\circ$ es la velocidad de la luz en el vacío, y n es el *índice de refracción*.



Ondas planas

Llamamos "ondas planas" soluciones de la ec. de ondas del tipo "d'Alembert": $f(\hat{k}\cdot\vec{r}\pm ct)$, en que $\hat{k}$ es la dirección de propagación. Por ejemplo si tomamos $\hat{k}=\hat{x}$, $f(x-ct)$ representa una señal viajando hacia $+\hat{x}$.

Para $\vec{E}$,

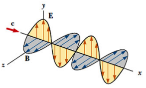
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0=\frac{\partial E_x}{\partial x}\Rightarrow\ E_X \text{ es constante,}$$

i.e. E_x solo puede venir de una componente electrostática,

$$\vec{E}=E_y\hat{y}+E_z\hat{z},\ \perp\vec{x},\ \text{la dirección de propagación.}$$

De manera genérica, ponemos

$$\vec{E}=\begin{pmatrix}0\\ f(x-ct)+g(x+ct)\\ F(x-ct)+G(x+ct)\end{pmatrix}$$



Relación entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en ondas planas

Estudiemos primero el caso $E_z = 0$. Calculemos $\vec{B}$:

$$\text{de la Ec. 6, } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$B_x = B_y = 0, \text{ o componentes magnetostáticas, y,}$$

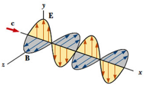
$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

$$\text{Pongamos } B_z = p(x - ct) + q(x + ct), \; \Rightarrow \; \frac{\partial B_z}{\partial t} = cp' - cq'.$$

$$\text{Además tenemos } \frac{\partial E_y}{\partial x} = f' + g' \; \Rightarrow cp' - cq' = f' + g' \quad (13)$$

$$\text{Ahora de la Ec. 7, } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ tenemos } -c^2\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -c^2(p' + q') = -cf' + cg', \quad (14)$$



Relación entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en ondas planas

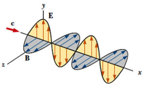
Combinando las Ecs. 13 y 14,

$$f = cp \text{ y } g = -cq \;\Rightarrow cB_z = f(x - ct) - g(x + ct).$$

Tarea: ver el caso $E_y = 0$ y superponer vectorialmente con $E_z = 0$, para obtener que si

$$\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x-ct)+g(x+ct) \\ F(x-ct)+G(x+ct) \end{pmatrix} \Rightarrow \; c\vec{B}\begin{pmatrix} 0 \\ -F(x-ct)+G(x+ct) \\ f(x-ct)+g(x+ct) \end{pmatrix}.$$

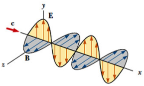
$$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B} \perp \hat{k}$$



Ejemplo/tarea: calcular u y vector de Poyting para una onda plana

$$\vec{S} = \epsilon_\circ c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}, \;\; \text{y} \;\; u = \frac{1}{2}\epsilon_\circ |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_\circ c^2 |\vec{B}|^2$$

$$\longrightarrow u = \epsilon_\circ E^2 \text{ y } \vec{S} = uc\hat{k}$$



Decomposición espectral: Repaso Fourier.

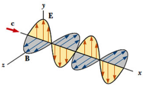
Las ecuaciones de Maxwell son lineales $\Rightarrow$ pasamos a $\mathbb{C}$.

$\forall F(x) \in \mathbb{C}$ en el espacio L_2, tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \|F(x)\|^2 dx$ es finita,

existe $f(k)$ tal que

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp(-ikx) dx, \text{ y}$$

$$F(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(k) \exp(+ikx) dk.$$



Decomposición espectral

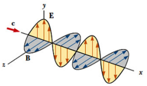
Por ejemplo, para el campo el eléctrico,

$$\vec{E}(x-ct)=\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\epsilon}(k)\exp(ik(x-ct))dk,$$

con $\vec{\epsilon}(k)=\hat{x}\epsilon_x e^{i\phi_x}+\hat{y}\epsilon_y e^{i\phi_y}$ *espectro* de $\vec{E}$.

Tarea: mostrar que para una onda plana monocromática (OPM),

$$\boxed{\vec{B}=\frac{1}{\omega}\hat{k}\times\hat{E}}.$$

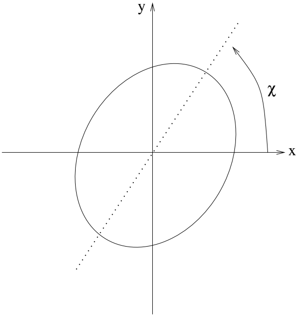


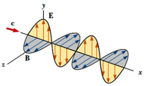
Polarización

Para cantidades físicas hay que tomar parte real. Para una OPM,

$$\mathrm{Re}\left[\vec{E}_k\right] = \mathrm{Re}\left[\hat{x}\epsilon_x e^{i\phi_x}\exp\left(i(kx-\omega t)\right) + \hat{y}\epsilon_y e^{i\phi_y}\exp\left(i(kx-\omega t)\right)\right]$$

- Polarización lineal: $\phi_y - \phi_x = 0$.
- Polarizacióh circular: $|\phi_y - \phi_x| = \frac{\pi}{2}$ y $\epsilon_y = \epsilon_x$.
- El caso general es elíptico, con $\mathtt{tan}(\chi) = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}\frac{\cos(\phi_x)}{\cos(\phi_y)}$.





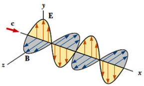
Parámetros de Stokes

Una manera conveniente de describir la polarización es usar los parámetros de Stokes:

$$
\begin{aligned}
I &= \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 \\
Q &= \epsilon_x^2 - \epsilon_y^2 \\
U &= 2\epsilon_x\epsilon_y \cos(\phi_y - \phi_x) \\
V &= 2\epsilon_x\epsilon_y \sin(\phi_y - \phi_x)
\end{aligned}
$$

El caso $V = 0$ es polarización lineal, $\phi_y = \phi_x$. I es equivalente al vector de Poynting, pero la información direccional (i.e. $\hat{k}$) esta implementada mediante una dependencia explícita en coordenadas angulares. Por ejemplo, para una fuente puntual de radiación en el centro de coordenadas esféricas, con $\vec{S} \parallel \hat{k}_\circ$, $I(\hat{k}) = \delta(\hat{k} - \hat{k}_\circ)\|\vec{S}\|$.
Notar que se cumple

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \tag{15}$$



Luz natural

Para luz natural, observamos una superposición de trenes de ondas (muchas funciones L_2). Para N señales L_2, observamos la superposición vectorial de los N campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, y si sumamos las componentes monocromáticas con número de onda k,

$$I(k) = \sum_{n=1}^{N} I_n(k) \;\; Q(k) = \sum_{n=1}^{N} Q_n(k) \;\; U(k) = \sum_{n=1}^{N} U_n(k) \;\; V(k) = \sum_{n=1}^{N} V_n(k).$$

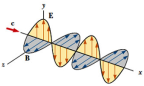
Si bien para cada componente n se cumple la Ec. 15, por la desigualdad de Shwartz

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2.$$

Definimos entonces la intensidad polarizada,

$$I_P = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2},$$

y la intensidad no-polarizada o 'natural', $I_n = I - I_P$. La fracción de polarización es $f = I_P/I$. Para luz natural $f = 0$ y $\vec{E}(x = 0, t)$ cambia aleatoriamente de dirección en un círculo con $\|\vec{E}\|^2$ constante, el resultado de la superposición aleatoria de ∞ trenes de ondas con fases distintas.



Ecuación de propagación-absorpción

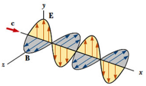
Consideramos la propagación de una onda EM en un medio que cumple la Ley de Ohm, $\vec{j}_l = \sigma \vec{E}$. Las ecuaciones de Maxwell permiten escribir (tarea)

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \mu_\circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \text{ Ecuación de propagación-absorpción,} \tag{16}$$

Si buscamos soluciones en ondas planas monocromáticas,

$$-k^2 + \epsilon \epsilon_\circ \mu \mu_\circ \omega^2 + i \omega \sigma \mu_\circ \mu = 0,$$

$$\Rightarrow k^2 = \epsilon \epsilon_\circ \mu \mu_\circ \omega^2 [1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_\circ \omega}], \text{ ecuación de dispersión.}$$



Ejemplo: espesor de piel y caja de Faraday

Consideremos un medio conductor que llena el espacio en $x > 0$, donde $\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I$.

$$\text{En } x > 0,\ \vec{E} = \vec{E}_\circ \underbrace{e^{-k_I x}}_{\text{atenuación}} e^{i}(k_R x - \omega t).$$

El “espero de piel” es la distancia típica de atenuación,

$$\delta = 1/k_I.$$

- Para un medio aislante, $\sigma = 0$, $k^2 = \epsilon\mu\epsilon_\circ\mu_\circ\omega^2 = \omega^2/c_1^2$.
- Para un medio conductor, $\sigma \to \infty$, $k^2 = i\sigma\mu\omega\mu_\circ$.

El espesor de piel para una onda radio de $\nu = 1$ MHz incidente sobre una placa de cobre ($\sigma = 6\ 10^7\omega^{-1}$ m^{-2}) es $\delta = 65\ \mu$m.