

## Parte II

# Magnetostática

## Índice

<b>II Magnetostática</b>	<b>1</b>
<b>1. Corriente eléctrica y ley de Ohm</b>	<b>1</b>
1.1. Corrientes y resistencias . . . . .	1
1.2. Ecuación de continuidad . . . . .	2
1.3. fem y efecto Joule . . . . .	3
<b>2. Campo magnético</b>	<b>3</b>
2.1. Fuerza de Lorentz y efecto Hall . . . . .	3
2.2. Dipolo magnético . . . . .	4
2.3. Ley de Biot-Savart y potencial vector . . . . .	5
2.4. Ley de Ampère . . . . .	6
<b>3. Materiales magnéticos</b>	<b>7</b>
3.1. Momentos magnéticos microscópicos . . . . .	7
3.2. Campo $\vec{B}$ producido por un dipolo. . . . .	8
3.3. Magnetización . . . . .	10
3.4. Campo $\vec{H}$ . . . . .	11
3.5. Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo . . . . .	11

Cargas en movimiento cerca de corrientes eléctricas son sometidas a una fuerza adicional a la del campo eléctrica, y parametrizable en términos de un campo vectorial llamado “*campo magnético*”. En este capítulo estudiaremos el caso de corrientes estacionarias, i.e. la magnetostática.

## 1. Corriente eléctrica y ley de Ohm

### 1.1. Corrientes y resistencias

#### Intensidad de corriente

Para medir el flujo de carga eléctrica usamos la *densidad de corriente*

$$\vec{j} = nq\vec{v}, \text{ y la intensidad de corriente } I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Las unidades de  $I$  son Ampère,  $A = C s^{-1}$ , y las de  $\vec{j}$  son  $A m^{-2}$ .

.4

## Ley de Ohm

- Consideremos un cable de largo  $l$ , y con una diferencia de potencial eléctrico  $V$  entre sus extremos:  $V = \Delta\phi = El$ . En ausencia de  $\vec{E}$  no hay corrientes  $\Rightarrow$  a primer orden  $\vec{j} \propto \vec{E}$ , si  $\|\vec{E}\|$  es suficientemente “pequeño”.
- Ponemos  $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ .
- El movimiento de los electrones es libre bajo la influencia de  $\vec{E}$ , pero se ve obstaculizado por choques con defectos o impurezas en el conductor.
- Entre cada choque que sufran los e-, son acelerados por  $\vec{E}$ , i.e. con  $m\dot{v} = qE \Rightarrow v = qEt/m + v(0)$ .
- Para calcular la conductividad  $\sigma$  aplicamos teoría cinética a un gas ideal de e-. El tiempo entre colisiones  $\tau = l/v_T$ , en que  $l$  es el libre camino medio entre impurezas  $l = 1/(n_i A_i)$ , y  $v_T = \sqrt{3kT/m}$  es la velocidad termal.
- En promedio  $v(0) = 0$ ,  $v = \frac{qE}{m}\tau$ , y como  $\vec{j} = nq\vec{v}$ ,  $j = nq^2 \frac{E}{m} \tau \Rightarrow \sigma = nq^2 \tau / m = nq^2 / (n_i A_i \sqrt{3mkT})$ .

.5

## Valores típicos de conductividad

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

material	cobre	H <sub>2</sub> O+NaCl	vidrio	madera
$\sigma/\text{Ohm m}^{-1}$	$5,9 \cdot 10^7$	23	$10^{-10}$	$10^{-11}$

.6

## Resistencia

Con  $E = V/d$ , y  $I = A\sigma E = \sigma AV/d$ , tenemos

$$j = \sigma E,$$
$$V = RI \text{ con } \boxed{R = \frac{d}{\sigma A}}.$$

.7

## 1.2. Ecuación de continuidad

Consideremos la variación temporal de la carga  $Q$  encerrada en un volumen  $\mathcal{V}$ :

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}.$$

Por conservación de carga, la variación de  $Q(t)$  es igual al flujo de cargas por la superficie  $S$  que encierra al volumen  $\mathcal{V}$ :

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \\ \Leftrightarrow \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} &= - \int_S \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\mathcal{V}, \text{ para cualquier } \mathcal{V}, \\ &\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}.\end{aligned}$$

.8

### 1.3. fem y efecto Joule

#### Fuerza electromotriz

- Vimos en electrostática que en un conductor  $\vec{E} = 0 \Rightarrow \phi = Cte \Rightarrow V = 0$ . Luego, para establecer una corriente en un cable conductor es necesario mantener los extremos del cable a una diferencia de potencial  $V \neq 0$  usando una *batería*, o una “fem”  $V$ .
- La batería transforma energía potencial química en energía potencial eléctrica (tal como la que se acumula en un condensador).
- Ejemplo: ver la batería descrita en Feynman II, p22-6, Sec. 22-3.

.9

#### Potencia disipada

- Dados  $V$  en un cable de largo  $l$ ,  $\vec{E} = Cte = \vec{j}/\sigma$ , o sea la  $\langle v \rangle$  de los  $e^-$  es Cte.
- Dado que  $\langle v \rangle$  es Cte, los  $e^-$  no son acelerados en promedio, y la energía potencial correspondiente a la caída de potencial, que debiera convertirse en un incremento de energía cinética, se disipa en calor a través de la fricción de los  $e^-$  con los defectos o impurezas en el conductor.
- $dU = Vdq \Rightarrow P = V \frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{P = VI = RI^2}$ .

.10

## 2. Campo magnético

### 2.1. Fuerza de Lorentz y efecto Hall

#### Fuerza de Lorentz

- Una carga en movimiento cerca de otras cargas en movimientos es afectada por un campo adicional al campo eléctrico, parametrizable en términos de otro campo vectorial, llamado campo magnética  $\vec{B}$ . Este efecto radica en la transformación relativista de los campos eléctricos de las cargas involucradas desde un sistema de inercia a otro. Para más detalles, revisar Feynman II.
- La fuerza neta percibida por una carga  $q$  se llama la fuerza de Lorentz, y escribe

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

- Las unidades de  $B$  son

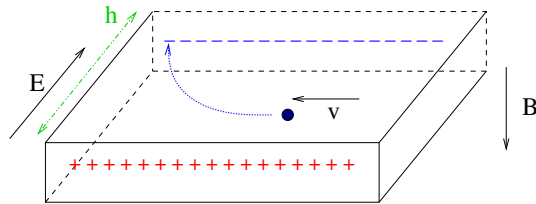
$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{C m s}^{-1}} = \text{T} = 10^4 \text{G},$$

en que el Tesla se usa en MKS, mientras que el Gauss se usa en CGS.

.11

## Efecto Hall

Para medir  $\vec{B}$  podemos usar por ejemplo el efecto Hall.



Si  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , el movimiento de la carga en azul (un electrón) es circular uniforme con radio de Larmor  $r_L = v/\omega_L$ ,  $\omega_L = \frac{eB}{2m} = v/r_L$  (tarea).

Si  $h \ll r_L$ , en una situación estacionaria

$$-e\vec{E} = e\vec{v} \wedge \vec{B}, \text{ con } E = V/h, \Rightarrow V = vBh,$$

$$\text{y como } I = nevA, \text{ con } A \text{ sección del conductor, } V = \frac{IhB}{neA}.$$

AN:  $B \sim 1 \text{ T}$ , barra de cobre de  $0,5 \times 0,1 \text{ cm}$ ,  $I = 1 \text{ A}$ , y 1 e- libre por átomo de cobre  $\Rightarrow V \sim 10^{-7} \text{ V}$ . Es más conveniente usar semiconductores<sup>1</sup>, con  $n$  chico ( $\ll 1$  e- libre por átomo).

.12

## Ausencia de carga magnética

Podemos medir las líneas de  $\vec{B}$  usando, por ejemplo, el efecto Hall. Se encuentra que son cerradas: no tienen origen ni fin. Para un volumen cualquiera, igual tantas líneas entran y salen de  $\mathcal{V}$ , de manera que

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}.$$

Por analogía con  $\vec{E}$  vemos que no existen cargas magnéticas.

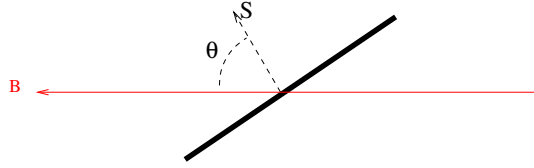
.13

## 2.2. Dipolo magnético

### Torque sobre un dipolo magnético

Consideremos un circuito eléctrico rectangular, con brazos verticales de largo  $L_1$ , brazos horizontales  $L_2$ , y sección  $A$ , por el cual pasa una corriente  $I$ , y que es permeado por un campo magnético  $\vec{B}$ , como se indica en la Fig., en una proyección de planta.

<sup>1</sup>conduce en una sola dirección



El torque debido a la resultante de la fuerza de Lorentz que actua sobre los electrones es

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\frac{L_2}{2}(nL_1A)q|\vec{v} \times \vec{B}| \sin(\theta) = L_2L_1IB \sin(\theta) \\ &= ISB \sin(\theta), \text{ o sea } \vec{\Gamma} = I\vec{S} \times \vec{B}.\end{aligned}$$

Definimos el *momento dipolar magnético*  $\vec{m} = I\vec{S}$ , de manera que  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$ .

.14

### Energía del dipolo magnético

Existe una energía potencial magnética asociada al torque. Análogamente a  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ , si orientamos la coordenada  $s$  según  $\vec{F}$  entonces  $F \sim -\partial U/\partial s$ . En caso de la aplicación de torque a un cuerpo rígido,  $r$  mide la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza  $F$  y el eje de rotación, o sea  $r$  es la ‘palanca’. Si  $\theta$  es el ángulo de rotación tenemos  $\partial s = r\partial\theta$ , y  $\Gamma = rF$ , de manera que  $\Gamma \sim -\partial U/\partial\theta$ . Entonces

$$U = -ISB \cos(\theta) \Rightarrow \boxed{U = -\vec{m} \cdot \vec{B}}.$$

La forma de esta energía magnética es muy similar a la del dipolo eléctrico ( $-\vec{p} \cdot \vec{E}$ ), lo cual motiva el uso de las palabras ‘momento dipolar magnético’, por analogía con el momento dipolar eléctrico.

.15

## 2.3. Ley de Biot-Savart y potencial vector

### Ley de Bio-Savart

El campo  $\vec{B}$  producido por una carga  $q'$  con velocidad  $\vec{v}'$  es

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q' \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \text{ con } \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}.$$

Entonces un elemento de circuito con intensidad  $I = nAq'v'$  y largo  $dl$  produce un campo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q'nAv' d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

y para un circuito cerrado,

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \oint d\vec{l} \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

.16

## Potencial vector

Pasemos al continuo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q' \vec{v}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rightarrow d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\mathcal{V}'$$

$$q' \rightarrow \rho d\mathcal{V}', \text{ con } \vec{j}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}'.$$

Notamos que  $(\vec{r} - \vec{r}') / |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = -\vec{\nabla} (1/|\vec{r} - \vec{r}'|)$ , y

$$d\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}',$$

$$\text{entonces } \vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}, \text{ con } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'.$$

.17

## Potencial vector y ausencia de cargas magnéticas

Como  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , hay un cierto grado de libertad en la definición de  $\vec{A}$ , llamado “libertad de Gauge”. Si le agregamos un vector constante,  $\vec{B}$  queda invariante. Además, como  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}) = 0$  para cualquier  $\Lambda$ , también queda invariante  $\vec{B}$  al agregar  $\vec{\nabla} \Lambda$ .

La forma más general posible de  $\vec{A}$  es entonces

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|} \right\} \vec{j}(\vec{r}') d\mathcal{V}' + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}).$$

Notamos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0,$$

es decir la ausencia de cargas magnéticas es consecuencia de Biot-Savart.

.18

## 2.4. Ley de Ampère

Otra consecuencia de la ley de Biot-Savart es la ley de Ampère: en régimen estacionario,

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})}.$$

.19

## Ejemplos: cálculos de $\vec{B}$ usando Ley de Ampère

- Alambre infinito
- Solenoide

.20

### 3. Materiales magnéticos

- Materia = átomos, con e- en movimientos orbitales  $\approx$  corrientes microscópicas, y con “espines”  $\approx$  dipolos magnéticos microscópicos  $\vec{\mu}$ .
- ¿Cuál es la interacción entre la asamblea de corrientes  $\vec{\mu}$  con un campo externo?
- ¿Qué se puede inferir de la estructura de la materia en base a su interacción magnética?

.21

Veremos existen 3 tipos de propiedades magnéticas:

- Materiales diamagnéticos: no poseen dipolos magnéticos  $\vec{\mu}$  permanentes. Su acoplamiento con  $\vec{B}$  es débil. Ejemplos: vidrio o cobre.
- Materiales paramagnéticos: tienen dipolos magnéticos  $\vec{\mu}$  permanentes. Su acoplamiento con  $\vec{B}$  es más fuerte que en el diamagnetismo. Ejemplos: oxígeno, titanio.
- Materiales ferromagnéticos: tienen dipolos permanentes con comportamiento colectivo ordenado. Su acoplamiento con  $\vec{B}$  es el más fuerte. Ejemplos: Fe, Co, Ni.

.22

La mayoría de los materiales tienen algún tipo de acoplamiento magnético...  
<https://www.ru.nl/hfml/research/levitation/diamagnetic-levitation/>

.23

#### 3.1. Momentos magnéticos microscópicos

- Vimos que para corrientes macroscópicas cerradas,  $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ ,  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}$ , con  $\vec{m} = I\vec{S}$  momento dipolar magnético.
- Para entender las propiedades magnéticas de la materia estudiaremos el origen de los dipolos microscópicos.

.24

#### Corrientes microscópicas: movimientos orbitales

- En el átomo de Bohr los e- tienen órbitas circulares, con velocidad  $v$ .
- La intensidad de corriente en este circuito es  $-e\frac{v}{2\pi r}$ .
- El dipolo microscópico  $\vec{\mu}$  correspondiente a esta corriente es

$$\mu = -e\frac{v}{2\pi r}\pi r^2 = -\frac{e}{2}\frac{mvr}{m} \Rightarrow \vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L},$$

en que  $\vec{L}$  es el momentum angular orbital.

- Resulta de mecánica cuántica que  $L_z = n\hbar$ , con  $\hbar = \frac{1}{2\pi} 6,62 \cdot 10^{-34}$  J s.

.25

### Corrientes microscópicas: espines

- Protones, neutrones y electrones giran en torno a un eje propio. A esta rotación se le llama *spin*, como la Tierra tiene *spin*.
- El momento magnético asociado es

$$\vec{\mu} = 2,002319 \frac{q}{2m} \vec{S}, \text{ con } S_z = \frac{n\hbar}{2}.$$

- Notar que si bien el neutrón no tiene carga neta, si tiene  $\vec{\mu}$  ( $\sim$  como si tuviese una carga negativa).

.26

### Corrientes microscópicas: factor de Landé

En general ponemos

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2m} \vec{L},$$

en que  $g$  es el factor de Landé:

- $g = 1$  para mov. orbital
- $g \approx 2$  para spin.

.27

## 3.2. Campo $\vec{B}$ producido por un dipolo.

- Para modelar las propiedades magnéticas de la materia es necesario calcular el campo  $\vec{B}$  producido por los dipolos microscópicos. Trabajamos con un dipolo magnético macroscópico.
- Para un circuito finito, tomamos la referencia de  $\vec{A}$  en  $\infty$ :

$$\vec{A}(\vec{r}_0) = 0 \text{ si } \|\vec{r}_0\| \rightarrow \infty,$$

y si usamos el *gauge*  $\vec{\nabla} \Lambda = 0$ ,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'.$$

- Demostraremos que el campo  $\vec{A}$  producido por un dipolo  $\vec{m}$  en el origen de coordenadas es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$

.28



## Cálculo de $\vec{A}$ para un dipolo

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\mathcal{V}'.$$

Para un circuito  $d\mathcal{V}' = \mathcal{S} dl'$ , en que  $\mathcal{S}$  es la sección del circuito y  $dl' = \|d\vec{r}'\|$ .

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ con } I = j\mathcal{S}.$$

Colocamos el 'circuito' cerca del origen, de manera que  $\|\vec{r}'\| \ll \|\vec{r}\|$ , es decir consideramos un circuito infinitesimal o bien tomamos  $r \rightarrow \infty$ . Entonces,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2} \right) \text{ (tarea).}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} d\vec{r}'.$$

.29

Para seguir usamos que (ver demo en clase, con  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ ):

$$\int (\vec{r}' \cdot \vec{r}) d\vec{r}' = \frac{1}{2} \int (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r}, \text{ entonces,}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} d\vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \overbrace{\int \frac{1}{2} (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{r}}^{\vec{m}} \\ &\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r}}{r^3}. \end{aligned}$$

Para un circuito cerrado circular,

$$m = \frac{I}{2} \int_0^{2\pi} r' r' d\theta = \pi (r')^2 I,$$

consistente con la definición anterior de  $\vec{m}$ .

.30

## Cálculo de $\vec{B}$ para un dipolo

Si el dipolo  $\vec{m}$  está en  $\vec{r}' \neq 0$ ,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Ahora calculamos  $\vec{B}$  con

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \vec{m} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right).$$

Es directo demostrar que para un dipolo  $\vec{B}$  también se puede expresar en términos de un gradiente:

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}, \text{ con } \phi_{\text{dip}} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r} - \vec{r}'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

.31

### 3.3. Magnetización

En un continuo de dipolos microscópicos, el momento dipolar magnético asociado a un elemento de volumen  $d\mathcal{V}'$  centrado en  $\vec{r}'$  es

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r}') d\mathcal{V}',$$

en que  $\vec{M}$  es la magnetización.

Calculamos el campo  $\vec{A}$  producido por  $\vec{M}$ :

$$\begin{aligned} \vec{A}_M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') d\mathcal{V}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M} \times \vec{\nabla}' \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla}' \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \end{aligned}$$

.32

#### Corrientes de magnetización

Reescribimos la última expresión,

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

introduciendo una densidad de corriente  $\vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$  y una densidad de corriente superficial  $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{S}'$  que dan origen al primer y segundo término en  $\vec{A}$ :

$$\vec{A}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_M(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\mathcal{V}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}_M}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS'.$$

Vemos que el campo  $\vec{A}$  producido por material con magnetización  $\vec{M}$  es el debido a unas “corrientes de magnetización”  $\vec{j}_M$  y  $\vec{K}_M$ .

⇒ magnetización  $\Leftrightarrow$  corrientes microscópicas

.33

#### Campo magnético de magnetización

Para calcular  $\vec{B}_M$  correspondiente a  $\vec{A}_M$  volvemos a  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , con

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' \\ \Rightarrow \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left[ \vec{M} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \right] d\mathcal{V}'. \end{aligned}$$

Se demuestra que

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M} - \mu_0 \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}, \text{ con } \phi_{\text{dip}} = \int \vec{M} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}'.$$

.34

### 3.4. Campo $\vec{H}$

En presencia de corrientes macroscópicas (i.e. corrientes de conducción),

$$\vec{B} = \vec{B}_M + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_l(\vec{r}') \times \vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}',$$

en que  $\vec{B}_M = \mu_0 \vec{M} - \mu_0 \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}$  es la contribución a  $\vec{B}$  debida a las corrientes microscópicas.  $\vec{B}$  se suele escribir

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \text{ donde}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_l \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\mathcal{V}' - \vec{\nabla} \phi_{\text{dip}}.$$

$\vec{H}$  se llama campo de intensidad magnética.

.35

#### Campo $\vec{H}$ y ley de Ampère.

Volvamos a la ley de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T, \text{ en que } \vec{j}_T = \vec{j}_l + \vec{j}_M, \text{ con } \vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}.$$

Hemos particularizado al caso en que no hay corrientes de superficies, i.e. no hay discontinuidades o bordes. Veremos el caso de condiciones de borde en magnetostática más adelante.

$$\text{Sustitución de } \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \text{ da } \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_l}.$$

Se justifica entonces que  $\vec{H}$  es la variable básica en presencia de materiales con magnetización, ya que el experimentador sólo controla a  $\vec{j}_l$  y no a  $\vec{j}_M$ .

.36

### 3.5. Diamagnetismo, Paramagnetismo, ferromagnetismo

En general resulta que en “materiales lineales” y isotrópicos,

$$\vec{M}(\vec{r}) \approx \frac{\chi_B}{\mu_B} \vec{H}(\vec{r}).$$

Vimos que la materia contiene dipolos microscópicos, con momentos del tipo

$$\vec{m} = \frac{-e}{2m} \sum_i \vec{L}_i,$$

más la contribución de spin.

.37

## Diamagnetismo

Para materiales diamagnéticos,  $\vec{m} = 0$ , i.e. no hay dipolos magnéticos microscópicos permanentes. Este es el caso de gases nobles, con capas electrónicas llenas. Pero si aplicamos  $\vec{B}$  aparece un momento inducido - para verlo consideremos el modelo de Bohr. La ecuación de movimiento del electrón es

$$m\omega_o^2 r = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_o r^2} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{Ze}{4\pi\epsilon_o m r^3}}.$$

Si aplicamos  $\vec{B}$  perpendicular al circuito, en dirección positiva hay una fuerza adicional en dirección al núcleo:

$$m_o\omega^2 r = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_o r^2} + e\omega r B,$$

si el electrón permanece en una órbita circular (se resuelve ecuación cuadrática en  $\omega$ ).

$$\Rightarrow \omega \approx \omega_o + \frac{\overbrace{eB}^{\omega_L}}{2m}.$$

.38

Entonces tenemos que si  $\vec{B}$  apunta en dirección de  $\vec{L}$ ,  $\omega \approx \omega_o + \omega_L$ , mientras que si  $\vec{B}$  apunta en dirección contraria a  $\vec{L}$ ,  $\omega \approx \omega_o - \omega_L$ . En ambos casos el efecto de  $\vec{B}$  es agregar momentum angular a  $\vec{L}$  en dirección de  $\vec{B}$ .

$$\Rightarrow |m_{\text{inducido}}| = \frac{e}{2m} (m_e \omega_L r^2) = \frac{e^2 r^2}{4m} \|\vec{B}\|.$$

Un cálculo más preciso, promediando sobre los radios orbitales de  $Z e^-$ , da

$$\vec{m}_{\text{inducido}} = -\frac{e^2}{6m} Z r_o^2 \vec{B}, \text{ en que } r_o^2 = \langle r^2 \rangle.$$

La magnetización es entonces

$$\vec{M} = -\underbrace{(N e^2 Z r_o^2 / (6m_e))}_{\chi_B / \mu_o < 0} \vec{B}.$$

.39

## Paramagnetismo

En el caso de materiales magnéticos con momento dipolar permanente seguimos un tratamiento estadístico,

$$\vec{M} = \frac{Nm^2}{3kT} \vec{B}.$$

Tomando en cuenta el efecto diamagnético,

$$\vec{M} = N \left\{ \frac{m^2}{3kT} - \frac{e^2 Z r_o^2}{6m_e} \right\} \vec{B} = \frac{\chi_B}{\mu_o} \vec{B}.$$

Como  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ ,

$$\vec{B} - \chi_B \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Leftrightarrow \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \text{ con } \mu = 1/(1 - \chi_B).$$

Notar que existen distintas definiciones de  $\chi_B$  y  $\mu$  en los textos. También se puede ver que una medición experimental de  $\mu$  permite estimar  $r_0$ .

.40

### Ferromagnetismo

Es parecido al paramagnetismo, pero hay un fenómeno de interacción colectiva que ordena los dipolos permanentes. Para materiales ferromagnéticos,  $\mu \sim 1000$ .

.41

### Condiciones de borde

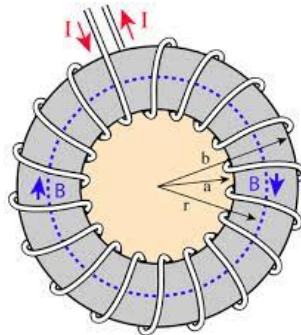
Las condiciones de continuidad de  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  en una discontinuidad plana entre dos medio materiales con permitividades  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son las siguientes.  $\perp$  y  $\parallel$  se refieren al plano de la discontinuidad. En ausencia de corrientes libres,

- $B_{\perp}$  es continuo. Deriva de  $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0$ .
- $H_{\parallel}$  es continuo. Deriva de  $\int (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{j}_l \cdot d\vec{S} = 0$ .

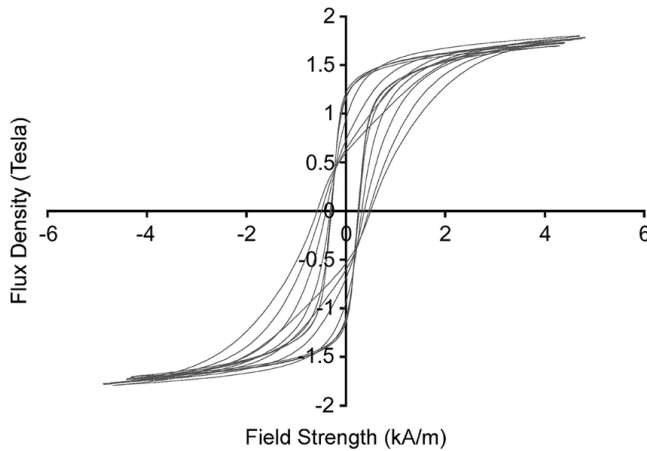
.42

### Ejemplos

- Electro-imán



- Histéresis



.43