Control 1
FI2004-2 2019A

tiempo: **3 h**

Relaciones útiles:

Distribución binomial y su aproximación para $N \gg 1$ (probabilidad de n eventos con probabilidad p en N experimentos): $P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^N q^{N-n}$, en que $q = 1 - p$, $P(n) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left[-\frac{(n-Np)^2}{2Npq}\right]$. Distribución Gaussiana: $g(x) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \langle x\rangle\right)^2 / \sigma^2\right]$, con $\sigma \equiv \sqrt{\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle}$. Distribución de Maxwell-Boltzmann (densidad de probabilidad en $\vec{v}$): $\rho(\vec{v}) = (\frac{a}{\pi})^{3/2} \exp(-av^2)$, $a = \frac{kT}{2m}$. Recurencia para la integral $I(n) = \int_0^\infty x^n \, e^{-\alpha x^2} dx$: $I(n) = \frac{(n-1)}{2\alpha} I(n-2)$, $I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $I(1) = \frac{1}{2\alpha}$.

I Difusión y marcha aleatoria.

Estudiamos el desplazamiento $\vec{R}$ de una molécula desde el origen del espacio reportado a un sistema de coordenadas cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, en el cual no hay dirección preferida. La molécula se desplaza en línea recta hasta chocar con otra molécula, de manera que $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{s}_i$ después de N choques.

1. `(0.5 pt)` ¿Cuál es el desplazamiento promedio $\langle \vec{s}\rangle$ entre choques? ¿Cuál es el desplazamiento total promedio $\langle \vec{R}\rangle$?
2. `(2.0 pt)` Calcule la desviación estandard del desplazamiento de la molécula, $\sigma(R_x)$, $\sigma(R_y)$, $\sigma(R_z)$, si el módulo del desplazamiento entre choques es una constante $\|\vec{s}\| = l$ (note que l es, por definición, el libre camino medio). Ayuda: use isotropía para estimar $\langle s_x^2\rangle$.
3. `(1.0 pt)` Nos restringimos ahora al caso unidimensional, en el cual la molécula se mueve una distancia l entre choques, hacia $+\hat{x}$ o hacia $-\hat{x}$, con igual probabilidad . ¿Cuál es la probablidad de encontrar la molécula a una distancia nl del origen (n natural), después de N choques?
4. `(0.5 pt)` Use el teorema de equipartición para estimar el tiempo promedio τ entre colisiones en función de l y de la masa m y temperatura T de la molécula.
5. `(1.5 pt)` ¿Cuál es el número de choques que ocurren en un tiempo t, suponiendo que $\vec{R} = 0$ en $t = 0$? Si $t \gg \tau$, escriba una expresión para la probabilidad $P(x, t)$ de encontrar la molécula en la coordenada x, después de un tiempo t (aproxime la probabilidad obtenida en el punto 3 por una probabilidad continua).
6. `(0.5 pt)` Demuestre que $P(x, t)$ es solución de la ecuación de difusión 1D,
$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$
e identifique el coeficiente de difusión D en función de l y τ.

II Caidas de temperatura y de presión por efusión

Un astronauta se encuentra realizando una caminata espacial cuando un pedazo de chatarra espacial percuta su casco. El astronauta esta amenazado por barotrauma, hipotermia, y asfixia, y quiere calcular cuanto tiempo tiene para regresar a la nave y asi evaluar si aun puede terminar su misión. Tiene que calcular la evolución temporal de la temperatura y de la presión de un gas ideal que tiene pérdidas por efusión en el vacío. Consideramos un recipiente de volumen V, conteniendo N partículas de gas ideal, las cuales pueden escapar por una perforación de área A.

1. (2 pt) En una primera aproximación supondremos que la efusión es isotérmica, $T = T_\circ$, en que $T_\circ = T(t=0)$, en el momento de la perforación.

   a) Muestre que el número de partículas que se escapan por unidad de area y tiempo es: $\frac{dN}{Adt} = -n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$, en que $n = N/V$.

   b) Muestre que $N(t) = N_\circ \exp\left[-\frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT_\circ}{2\pi m}}\,t\right]$.

2. (2 pt) Ahora tomamos en cuenta las pérdidas de energía interna, $U = 3/2NkT$, y la consecuente caida de temperatura.

   a) Siguiendo un razonamiento análogo al que le llevó al resultado del Pto. 1*a*, considere que para cada partícula que escapa la energía interna disminuye en $\frac{1}{2}mv^2$, y muestre que: $\frac{dU}{Adt} = -n\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\,(kT)^{3/2}$.

   b) Calcule $\frac{dU}{dt}\left(\frac{dT}{dt}, \frac{dN}{dt}\right)$, y sustituya dN/dt del Pto. 1*a* para obtener una ecuación diferencial para $T(t)$.

   c) Muestre que $T(t) = T_\circ \chi^{-2}$, en que $\chi(t) = \left[1 + \sqrt{\frac{kT_\circ}{8\pi m}}\frac{A}{3V}t\right]$.

   d) Vuelva a usar dN/dt del Pto. 1*a* para mostrar que $N(t) = N_\circ \chi^{-6}$.

   e) Muestre que $P(t) = P_\circ \chi^{-8}$.

3. (2 pt) Use la figura adjunta, (calculadas para el aire, con $A = 1$ mm^2 y $V = 1$ m^3) para responder las siguientes preguntas:

   a) ¿ Qué opina de la aproximación isotermal? Compare dN/dt de los Ptos 1*b* y 2*d* y demuestre que el error implicado en la approximación es de orden $(A/V)^2$. Cuantifique la calidad de la aproximación calculando $(N_t - N_t^{\text{isotermal}})/N_t$ para $A/V \ll 1$.

   b) Las asfixia ocurre cuando $P/P_0 \approx 1/4$, la hipotermia cuando $T \approx -50$ °C por más de 10 mn. Para estimar la caida de presión maxima que puede aguantar el astronauta considere que los busos deben ascender no mas de 10 m en 1 mn para evitar el barotrauma, y use el hecho que la presión en el oceano incrementa en 1 atm cada 10 m de profundidad.

      1) Determine cuanto tiempo tiene el astronauta para regresar a la nave.

      2) ¿ A partir de que apertura A el barotrauma es el peligro más imminente que aflige al astronauta? (ayuda: calcule dP/dt, vea que crece monotonicamente en el tiempo, y estime $\sqrt{\frac{kT_\circ}{8\pi m}}$ usando la figura adjunta.).