Control 2
FI2004-2 2019A

tiempo: **3 h**

I Temperatura, entropía, y paramagnetismo en física cuántica

1. Consideraciones generales sobre temperatura y entropía. Sea un sistema A, con energía E, en equilibrio con $A' \gg A$ (o sea A es un reservorio de temperatura). Sea la entropía $S = k \ln \Omega$, y $\beta = \frac{1}{kT} = \partial \ln \Omega / \partial E$, en que Ω es el número de estados accesibles del sistema en consideración (también llamado peso estadístico). Desarrolle los siguientes puntos, redactando en detalle sus respuestas (no se limite a escribir ecuaciones):

   a) (`1 pt`) Demuestre que el valor más probable de E corresponde al máximo de entropía de $\{A + A'\}$, y que en equilibrio $\beta = \beta'$.

   b) (`1 pt`) Calcule la probabilidad que A esté en un cierto estado r con energía E_r.

2. Paramagnetismo en física cuántica. Queremos estudiar el concepto de temperatura en el caso de un material paramagnético aislado, compuesto por N dipolos de spin $\frac{1}{2}$, que interactua solamente con un campo magnético externo y constante. N_+ dipolos tienen energía $+\mu B$, y N_- tienen energía $-\mu B$.

   a) (`1 pt`) Escriba el peso estadístico $\Omega(E, N)$, es decir el número de estados correspondiente al mismo estado macroscópico E, N.

   b) (`1 pt`) Calcule la entropía del sólido, usando la fórmula de Stirling ($\ln N! \approx N \ln N - N$).

   c) (`1 pt`) Demuestre que la temperatura del sistema es
   $$\frac{1}{T} = \beta k = \frac{k}{2\mu B} \ln \left[\frac{N - E/(\mu B)}{N + E/(\mu B)} \right].$$

   d) (`0.5 pt`) ¿ A qué situación, en terminos de N_+ y N_-, corresponden los casos $T = 0$ y $T \to \infty$?

   e) (`0.5 pt`) ¿ Qué ocurre en términos de T si existe inversión de población, o sea si $N_+ > N_-$?

   f) (`+1 pt`) ¿ Es posible invertir la población de dipolos con un reservorio de temperatura compuesto por un gas ideal? ¿ Conoce, o se le ocurre, algun un mecanismo de inversión ?

II Entropía de mezcla.

En este problema estudiamos dos procesos conducentes a la mezcla de gases ideales.

1. Primero consideramos la mezcla libre de dos gases distintos, inicialmentes confinados a sectores separados de un volumen V (Fig. 1), en que la separación es diatérmica y permite el equilibrio mecánico entre los dos sectores (o sea no esta fija).

   a) (`1 pt`) Para fijar ideas, consideramos primero la forma general de la entropía de un gas ideal en función del volumen V. Si cada molécula ocupa un volumen v_1 (por ejemplo $v_1 = V/N$), tendrá V/v_1 posiciones o 'estados' posible, de manera que para una partícula el peso estadístico es $\Omega_1 \propto V$. Siguiendo este argumento, explique porque para el conjunto, $S = kN \ln (V/V_\circ)$.

b) (1 pt) Podemos derivar mas rigurosamente la expresión anterior al considerar la variación de energía del gas ideal. Ponemos $dE = dQ + dW$, en que dQ es la variación de energía en forma de calor (es decir a volumen constante), y dW es la variación debiba a un trabajo mecánico.

- Justifique que $dW = -PdV$.
- A volumen constante, $dS = S(E + dQ) - S(E) = k \ln(\Omega(E + dQ)) - k \ln(\Omega(E))$. Demuestre que $dS = \delta Q/T$
- Recordando que $E = \frac{3}{2}NkT$ para un gas ideal, muestre que la entropía de un gas ideal de N particulas, relativa a la de un estado de referencia $(T_\circ, V_\circ)$, es

$$S = \frac{3}{2}Nk\log(T/T_\circ) + Nk\log(V/V_\circ).$$

c) (1 pt) Retiramos la separación entre los dos gases. Expresar la variación de entropía del sistema en función del número de partículas de cada gas. Explique, es este un proceso reversible o irreversible?

2. (3 pt) Las diferencias entre las moléculas de ambos gases permiten, en principio, diseñar paredes con porosidad selectiva a cada tipo de molecula, de manera a separar o mezclar dos gases reversiblemente (Fig. 2). Partimos de la misma situación que en la Fig 1, pero mezclamos reversiblemente los dos gases, manteniendo el sistema a temperatura constante por contacto con un reservorio, y aplicando unas presiones en las paredes porosas iguales a las las presiones parciales P_1 y P_2 de los gases en la región comun $(P_1 + P_2 = P)$.

   a) ¿ Cuál es la variación de energía interna del sistema? Calcule el trabajo ejercido por el sistema, y el calor intercambiado con el reservorio de temperatura.

   b) ¿ Cuál es la variación de entropía del sistema (use la parte $2a$)? Como compara con el resultado del proceso en la parte $1c$? Calcule la variación de entropía del universo (el sistema y su entorno). Explicar porque este es un proceso reversible.

Figura 1: Mezcla libre

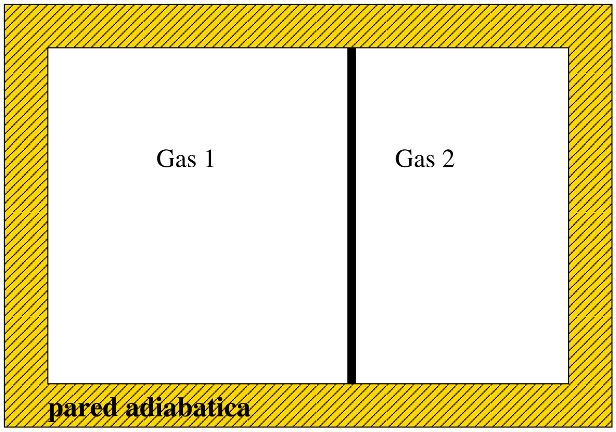

Figura 2: Mezcla reversible