.1

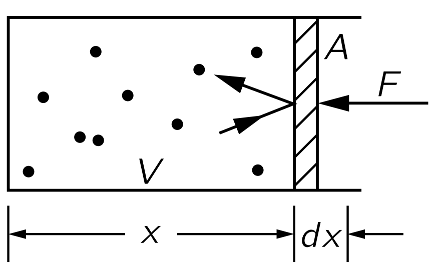
Parte III
Física Estadística

Índice

1. Consideraciones generales en gases

1.1. Presión

¡presentation¿1.1.1- fuente: Feynman I, 39.



- Al chocar con el pistón, las partículas le entregan momentum y se requiere una fuerza $\vec{F}$ para mantener x fijo.
- Ponemos $F \equiv PA$, donde P es la presión del gas.
- Si todas las partículas viajan hacias $+\hat{x}$, el número de partículas que chocan con ΔA durante Δt es

$$\Delta N = n v_x \Delta t \Delta A, \quad \text{en que } n \equiv \frac{N}{Ax}. \tag{1}$$

.3

¡presentation¿1.1.1-

- En general, para que la energía del gas sea constante, es necesario que $|v_x^i| = |v_x^f|$ antes y después de una colisión. El momentum entregado al pistón durante Δt es entonces
$$\Delta p_T = 2mv_x^2 n\Delta t\Delta A, \tag{2}$$
y $P = 2nmv_x^2$.
- En promedio, y tomando en cuenta que solo la mitad viaja hacia $+\hat{x}$,
$$P = m\langle v_x^2\rangle n, \text{ o sea } PV = \frac{2}{3}N\langle\frac{1}{2}mv^2\rangle. \tag{3}$$

.4

¡presentation¿1.1.1-

- De consideraciones generales, tenemos entonces para un gas monoatómico,
$$PV = \frac{2}{3}N\langle\frac{1}{2}mv^2\rangle. \tag{4}$$
- Como la energía total del gas es
$$U = \sum_j \frac{1}{2}mv_j^2 = N\langle\frac{1}{2}mv^2\rangle, \text{ y } PV = \frac{2}{3}U. \tag{5}$$
- Para moléculas poliatómicas,
$$PV = (\gamma - 1)U, \tag{6}$$
y para un gas monoatómico, $(\gamma - 1) = 2/3$, o sea $\gamma = 5/3$.

.5

¡presentation¿1.1.1- Ejemplo: Compresión adiabática

- Si no hay pérdidas por las paredes,
$$dU = dW = -dW_F, \tag{7}$$
en que
$$dW_F = \vec{F}\cdot d\vec{x} = Fdx. \tag{8}$$
- Entonces,
$$dU = -PAdx = -PdV, \tag{9}$$
y con Ec. 6 se llega a
$$PV^\gamma = \text{Cte.} \tag{10}$$

.6

¡presentation¿1.1.1- Ejemplo: compresión de un gas de fotónes

- De consideraciones generales, el momentum entregado al pistón por las partículas que chocan una area ΔA durante Δt se puede escribir

$$\Delta p_T = 2 n p_x v_x \Delta t \Delta A, \tag{11}$$

si todas viajan hacia $+\hat{x}$.
- En promedio, y tomando en cuenta que solo la mitad viaja hacias $+\hat{x}$,

$$\langle p_x v_x \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle, \text{ y} \tag{12}$$

$$\Delta p_T = \frac{n}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle \Delta t \Delta A \Rightarrow PV = \frac{N}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle. \tag{13}$$

Para un fotón, $m = 0$, $v = c$, y $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, entonces $E = pc$ y

$$PV = \frac{N}{3} \langle E \rangle = \frac{1}{3} U, \tag{14}$$

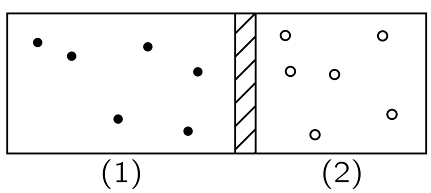
de manera que $\gamma = 4/3$ para fotones, y en una compresión adiabática $PV^{\frac{4}{3}} = \mathrm{Cte}$.

.7

1.2. Temperatura

¡presentation¿1.1.2-

- Concepto de temperatura se usa para describir un estado de equilibrio térmico, que queremos formalizar.
- Consideremos dos gasos mono-atómicos separados por un pistón. Por igualdad de presión, $n_1 \langle \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \rangle = n_2 \langle \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rangle$. Pero las oscilaciones micro del pistón sugieren que debe haber otra condición...

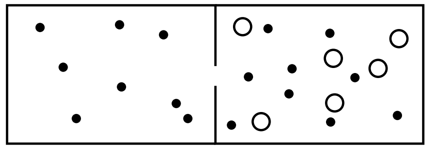


- Para descubrir esta otro condición consideramos un problema más simple, la mezcla de 1 y 2, donde las partículas pueden chocar entre ellas.
- Las leyes de conservación de energía y momentum muestran que en un choque elástico de 1 y 2, v_1 se conserva, pero las direcciones son aleatorias y no dependen de $\vec{v}_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \langle \vec{\omega} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} \rangle = 0$ (el promedio se saca en un número grande de choques).

.8

¡presentation¿1.1.2-

- La condición $\langle\vec{\omega}\cdot\vec{v}_{\rm CM}\rangle = 0$ da $\langle\frac{1}{2}m_1 v_1^2\rangle = \langle\frac{1}{2}m_2 v_2^2\rangle$.
- Que pasa si los gases están separados? Podemos considerar una membrana semi-permeable,



o bien imaginar un 3er cuerpo compuesto por dos masas ligadas a ambos lados del pistón por una barra rígida.
- La condición buscada para el equilibrio de los gases separados es la igualdad de las energías cinéticas promedios.
- $\Rightarrow$ definimos la "temperatura" como una unidad de energía cinética microscópica,

$$\frac{3}{2}kT = \langle\frac{1}{2}mv^2\rangle, \tag{15}$$

y por isotropía, $\frac{1}{2}kT = \langle\frac{1}{2}mv_x^2\rangle$, con $k = 1{,}38\ 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.

.9

¡presentation¿1.1.2-

- Reformulamos entonces la ley de gas ideal,

$$PV = NkT, \ \ \text{o} \ \ PV = n\mathcal{R}T, \tag{16}$$

con n número de moles y $\mathcal{R} = 8{,}32$ SI.
- Equilibrio termodinámico $\Leftrightarrow$ entre dos sistemas 1 y 2:

$$T_1 = T_2, \quad P_1 = P_2. \tag{17}$$

.10

1.3. Grados de libertad

¡presentation¿1.1.3-

- Vimos que el valor promedio de energía cinética de un partícula puntual en 1 dirección es $\frac{1}{2}kT$. ¿Cómo extendemos este resultado al caso de moléculas poliatómicas?
- Consideramos un gas de moléculas diatómicas $A+B$, mezclado con un gas mono-atómico C. Extendemos los argumentos de valores medios anteriores para colisiones $A+C$ y $B+C$, para ver que $\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_C v_C^2 = \frac{3}{2}kT$.
- A su vez, para el centro de masa de $A+B$, se demuestra que $\langle\frac{1}{2}Mv_{\rm CM}^2\rangle = \frac{3}{2}kT$, entonces vemos que hay $\frac{1}{2}kT$ por cada grado de libertad de translación del CM, y $\frac{1}{2}kT$ por cada uno de los 2 grados de libertad de rotación, y $\frac{1}{2}kT$ en vibraciones.
- Gas diatómico, $U = 3NkT \ \Rightarrow \ \gamma = 4/3$.

.11

1.4. Camino libre medio

¡presentation¿1.1.4-

- La distancia típica que recorre una partícula de sección eficaz $\sigma = \pi a^2$ antes de chocar con otra es
$$l = \frac{1}{n\sigma}, \tag{18}$$
donde n es la densidad de número del gas.
- A.N.: en el aire en CNTP, $l \sim 0{,}1\,\mu$m.

.12

2. Estadística de Boltzmann

¡presentation¿2-

- Como vimos en el Capítulo A, Sec. 2.2, si un sistema A está en contacto con un baño térmico (es decir un reservorio o estanque $A' \gg A$, con temperatura constante T), entonces la probabilidad de a A en un estado específico r con energía E_r e:
$$P_r \propto e^{-\beta E_r}. \tag{19}$$
En general,
$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{kT}. \tag{20}$$
- Estadística de Boltzmann: la probabilidad de encontrar un sistema con temperatura T en un estado con energía total E es
$$P \propto \exp(-\frac{E}{kT}). \tag{21}$$

.13

2.1. Distribución de Maxwell-Boltzmann

¡presentation¿2.2.1-

- Argumentos básicos permiten concluir que la distribución de velocidades de las N partículas en un gas ideal es
$$f(\vec{v}) = N\left(\frac{m}{2kT\pi}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{kT}}. \tag{22}$$
- $f(\vec{v})d^3v$ es el # de partículas con $v_x \in [v_x, v_x + dv_x]$, $v_y \in [v_y, v_y + dv_z]$, $v_z \in [v_z, v_z + dv_z]$.
- Ejemplo (tarea): Cuántas partículas chocan elto de pared dA en dt?

.14

3. Procesos de transporte

3.1. Difusión y conductividad térmica

¡presentation¿3.3.1- Fuente: Reif 8 + Feynman I, 43

- Un gradiente de densidad de particulas ‘trazas’ con densided $n(x)$ en un fondo homógeneo genera un flujo de particulas J_v:

$$J_x \approx -D\frac{\partial n}{\partial x}, \text{ hipótesis ‘orden 1’}. \tag{23}$$

  donde D es el coeficiente de difusión.
- Conservación de masa o número de partículas da la ecuación de difusión (ver cátedra):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D^2\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \tag{24}$$

- Usando física microscópica, llegamos a (ver cátedra):

$$D = \frac{l\langle v\rangle}{3}, \text{ con } \langle v\rangle \sim \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \tag{25}$$

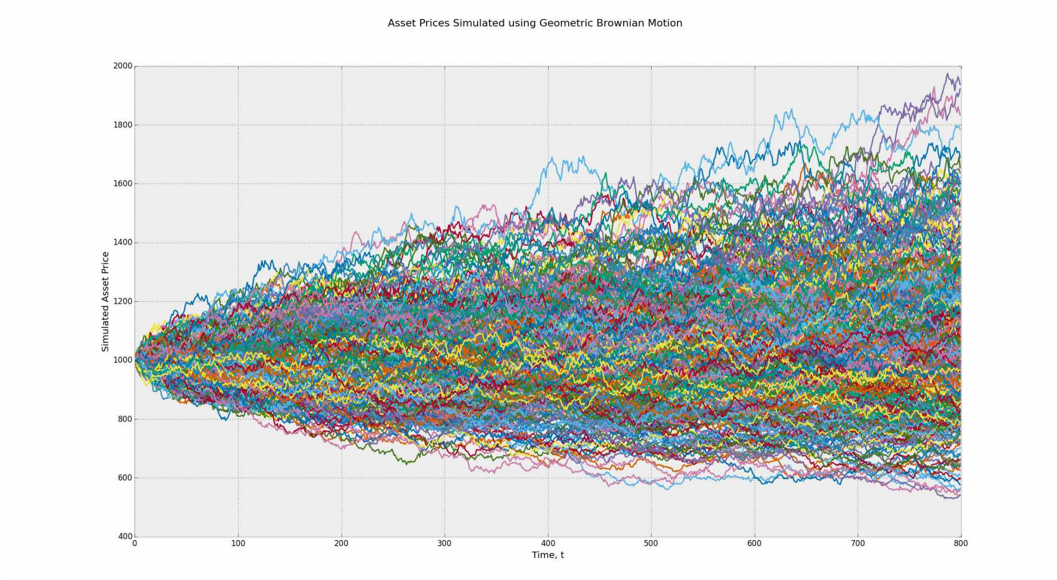
.15

¡presentation¿3.3.1-

- También se puede ver el proceso de difusión como una marcha aleatoria (tarea: P1, C1, FI2004). $\Rightarrow$ en el límite de muchos pasos, la densidad de probabilidad $P(x,t)$ de encontrar una partícula en la coordenada x es

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{26}$$

- El fenómeno de marcha aleatoria es universal, incluso en Wall Street:



.16

¡presentation¿3.3.1-

- De la misma manera que para difusión de partículas, para difusión de calor (energía cinética micro), ponemos:

$$R_x \approx -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \text{ hipótesis 'orden 1'}. \tag{27}$$

- Usando física microscópica, se llega a (ver cátedra):

$$\kappa \sim \frac{1}{2}\frac{k}{\sigma}\sqrt{\frac{3kT}{m}}, \tag{28}$$

donde σ es la sección de colisión.

.17

3.2. Movimiento browniano

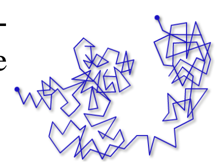
¡presentation¿3.3.2-

- Lucretius 60 a.c.. R. Experimento: Brown ~1827, modelo quantitativo: Einstein 1905.
- Video: particulas de plástico en agua, luego partículas de hollín en aire.

.18

¡presentation¿3.3.2-

- Marcha aleatoria: luego de N pasos en un tiempo t, cada uno de largo l y intervalo de tiempo promedio τ, el desplazamiento total $\vec{R}$ tiene dispersión $\sigma = \langle R^2 \rangle = \alpha\sqrt{t}$. El factor α debe poder relacionarse con física microscópica.



.19

¡presentation¿3.3.2-

- En presencia de roce, la ec. de mov. 1D es

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} = F_{\rm ext}, \tag{29}$$

para un campo de fuerza $F_{\rm ext}$ (ej. gravedad). Medimos μ si conocemos $F_{\rm ext}$, observando la velocidad en estado estacionario: $\mu\dot{x} = F_{\rm ext}$.
- Los impulsos que dan origen al mov. Browniano son una fuerza microscópica aleatoria. Queremos estimar $\langle R^2 \rangle(t) = 3\langle x^2 \rangle(t)$ (caso isotrópico).

- Tomamos $\langle x \times \text{Ec. } 29\rangle$. Reconocemos $\mu x\dot{x} = \frac{1}{2}\mu\ddot{x}^2$, y

$$\langle m x \ddot{x}\rangle = m \underbrace{\left\langle \frac{d}{dt}\left(x\dot{x}\right)\right\rangle}_{\frac{d}{dt}\langle x v_x\rangle\ \sim 0 \text{ por hipótesis}} - \underbrace{m\langle(\dot{x})^2\rangle}_{kT},$$

donde usamos la hipótesis de marcha aleatoria para aproximar $x \propto \sqrt{t} \rightarrow v_x \propto 1/\sqrt{t} \Rightarrow xv_x =$ constante.

.20

¡presentation¿3.3.2-

- ademas, $\langle xF_x\rangle = 0$, y llegamos a que $\langle x \times \text{Ec. } 29\rangle \Leftrightarrow$

$$\left\langle \frac{\mu}{2}\frac{dx^2}{dt}\right\rangle - kT = 0 \Rightarrow \frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{2kT}{\mu}.$$

- En 3D,

$$\sigma = \sqrt{\langle R^2\rangle} = \sqrt{\frac{6kT}{\mu}t}.$$

- Medimos σ para despejar k, y con $PV = RT = \mathcal{N}kT$, estimamos $\mathcal{N}$, y luego tamaño atómico.

.21