

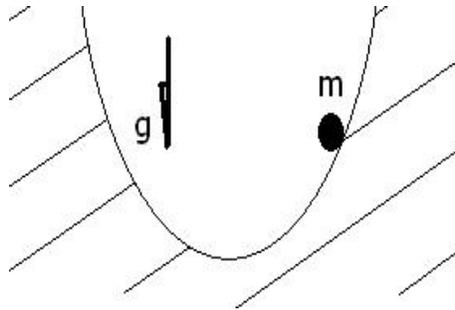
Ejercicio 2

Fi21b

25 de agosto de 2005

1. Partícula en una parábola:

Se tiene una partícula confinada a moverse sobre una parábola, definida por $y = ax^2$, bajo la acción del campo gravitatorio terrestre.

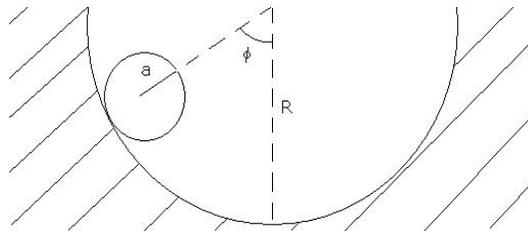


Encuentre el valor (magnitud y dirección) de la fuerza normal, que ejerce la superficie sobre la partícula. ¹

2. Propuesto

Encuentre la Energía cinética de un cilindro homogéneo de masa M y radio a que desliza dentro de una superficie cilíndrica de radio R .

²



¹Tiempo: 30 minutos. Suerte!!

²Problema resuelto en el capítulo 6 del Landau.

3. Pauta

Consideramos la partícula con dos grados de libertad x e y . Tenemos que la Lagrangiana de la partícula es:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Existe una sola restricción para el problema, esta es que la partícula se debe mover sobre una parábola definida por $y - ax^2 = 0$. Por lo tanto la Lagrangiana con restricciones es:

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(y - ax^2)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos tres ecuaciones de movimiento:

$$\text{En } \hat{x}: m\ddot{x} + 2\lambda ax = 0$$

$$\text{En } \hat{y}: m\ddot{y} + mg - \lambda = 0$$

$$\text{En } \lambda: y - ax^2 = 0$$

Derivando dos veces la tercera ecuación con respecto al tiempo obtenemos que:

$$\ddot{y} = 2a\dot{x}^2 + 2ax\ddot{x}$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$m\ddot{x} + 2\lambda ax = 0$$

$$m(2a\dot{x}^2 + 2ax\ddot{x}) + mg - \lambda = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por $-2ax$, sumando ambas ecuaciones y despejando λ se obtiene:

$$\lambda = \frac{2ma\dot{x}^2 + mg}{1 + 4a^2x^2}$$

La fuerza de restricción, en este caso la normal, viene dada por $\vec{F} = \lambda \nabla(C)$, donde C es la restricción asociada a λ . En este caso:

$$\nabla(C) = \nabla(y - ax^2) = -2ax\hat{i} + 1\hat{j}$$

Por lo tanto la fuerza normal es:

$$\vec{N} = \left(\frac{2ma\dot{x}^2 + mg}{1 + 4a^2x^2}\right)(-2ax\hat{i} + 1\hat{j})$$

Se recomienda que hagan un análisis del resultado en distintos casos, ¿Que sucede cuando $x = 0$? ¿Recuperamos los resultados conocidos?