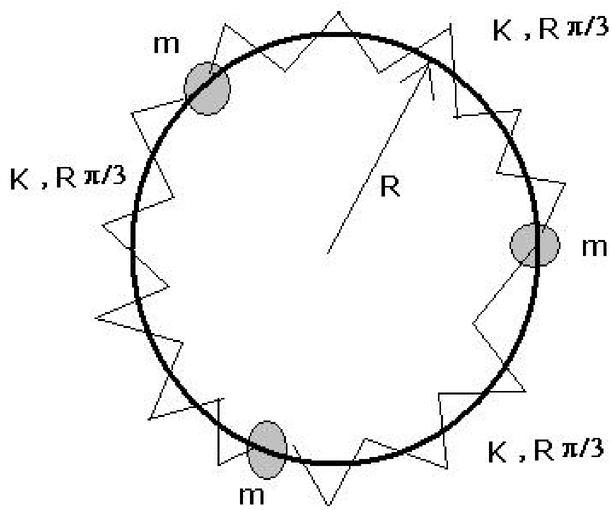
Ejercicio 4

Fi21b

25 de octubre de 2005

1. Un problema de oscilaciones

Considere tres masas iguales que pueden deslizar sobre un anillo de radio R. Estas masas se encuentran unidas entre ellas por tres resortes de igual largo natural ($l = R\frac{\pi}{3}$) y constante elástica k.



Elija un sistema de coordenadas adecuadas y escriba el langrangeano del sistema. Luego calcule las frecuencias y modos normales.

¿Existen frecuencias degeneradas? En este caso ocupe el método de Gram Schmidt para encontrar los modos normales ortonormales.

Finalmente escriba escriba la matriz modal. ¿Cuales son las coordenadas normales para este problema?

2. Solución

Elegimos como coordenadas generalizadas los ángulos θ_1, θ_2, θ_3, como los ángulos de desviación de las masas respecto a los puntos de equilibrio. De esta forma las energías cinética y potencial quedan como:

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2 + \dot{\theta_3}^2)$$
$$V = \frac{1}{2}KR^2((\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2 + (\theta_3 - \theta_1)^2)$$

Por tanto las matrices T y V son:

$$T = \begin{pmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}$$
$$V = \begin{pmatrix} 2KR^2 & -KR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & 2KR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & -KR^2 & 2KR^2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar las frecuencias normales debemos encontrar los ω^2 tales que $det(V - \omega^2 T) = 0$. Tenemos que:

$$V - \omega^2 T \begin{pmatrix} 2KR^2 - \omega^2 mR^2 & -KR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & 2KR^2 - \omega^2 mR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & -KR^2 & 2KR^2 - \omega^2 mR^2 \end{pmatrix}$$

Y finalmente, despues de un arduo trabajo algebraico se obtiene:

$$det(V - \omega^2 T) = \omega^2(3K - m\omega^2)^2$$

Les recomiendo realizar los pasos intermedios, para que suelten la mano antes del control. En este punto casi todos se equivocaron en el ejercicio. Luego las tres frecuencias normales son:

$$\omega_1 = 0 \ \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

Se pide calcular los modos normales. Veamos la frecuencia $\omega_1 = 0$. Debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 2KR^2 & -KR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & 2KR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & -KR^2 & 2KR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{pmatrix} = 0$$

Claramente la solución viene dada por: $\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Luego veamos la frecuencia degenerada $\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3K}{m}}$. Debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} -KR^2 & -KR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & -KR^2 & -KR^2 \\ -KR^2 & -KR^2 & -KR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix} = 0$$

Busco dos soluciones distintas, una para cada frecuencia normal. Por ejemplo se puede elegir:

$$\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estos dos vectores no son ortogonales, se debe usar el método de gram Schmidt para encontrar un par de vectores ortogonales que sean combinación lineal de estos dos vectores. Haganlo ustedes. Un resultado puede ser:

$$\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -1{,}4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}$$

Para escribir la matriz modal deben normalizar estos vectores y escribir la matriz A. Se los dejo a ustedes. Les recomiendo revisar bien este tipo de ejercicios, son bastante similares todos, sólo deben ser cuidadosos en no equivocarse en el algebra.