FI22A-Sección 3 **Control 1** Prof: Simón Casassus

1 Septiembre 2005 Ayudantes: Nicolás Reyes, Martín Jacques

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Principio de mínima acción.

1. Muestre que la función $f(x)$ que extrema $I = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(f, f', x)dx$, con extremos fijos $f(x_1) = f_1$ y $f(x_2) = f_2$, es solución de la ecuación de Euler-Lagrange:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial f'} - \frac{\partial\Phi}{\partial f} = 0, \text{ en que } f' = \frac{df}{dx}.$$
2. Enuncie el principio de mínima acción y demuestre que es una formulación de la mecánica alternativa a las 3 leyes de Newton, considerando el caso de N partículas interactuantes, con potencial $U(\{\vec{r_i}\}_{i=1}^{N})$.

II Fuerzas de Constricción.

Una argolla de masa m está restringida a moverse en una hélice que en coordenadas cilíndricas está dada por $r = a$ y $dz = bd\theta$, con a y b constantes. La argolla se mueve sin roce sobre esta hélice, y est á también sujeta a un potencial $V(r, z) = k(r^2 + z^2)/2$. En $t = 0$ la argolla se lanza con velocidad $\dot{z}|_{t=0} = v_o$ desde $z|_{t=0} = 0$. Encuentre la fuerza de constricción que actúa sobre la partícula como función del tiempo utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

III Péndulo físico.

Estudiamos el movimiento de un cuerpo rígido de N partículas desde un sistema inercial $S_\circ$. Usamos coordenadas $(\vec{R}, \{\vec{r_i}\}_{i=1}^{N})$, tales que el vector posición en $S_\circ$ para la particula i es: $\vec{r_\circ} = \vec{R} + \vec{r_i}$, en que $\vec{R}$ corresponde a la posición del centro de masa en $S_\circ$, y $\vec{r_i}$ a la de partícula i en un sistema S con origen en el centro de masa, y con ejes fijos en el cuerpo.

1. Escriba la expresión general para la energía cinética del cuerpo en $S_\circ$, usando coordenadas generalizadas adecuadas a los 6 grados de libertad del cuerpo. Particularice al caso en que los ejes de S coinciden con los ejes principales de inercia del cuerpo $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.
2. El cuerpo rígido es un péndulo físico: está sometido a un campo gravitacional uniforme $\vec{g}$, y oscila en torno a un eje horizontal fijo en $S_\circ$, con dirección $\hat{a} = \cos(\alpha)\hat{e}_1 + \cos(\beta)\hat{e}_2 + \cos(\gamma)\hat{e}_3$. Llamamos 'brazo' del péndulo $\hat{b}$ la recta perpendicular a $\hat{a}$ que pasa por el centro de masa. Sea ϕ el ángulo entre $\vec{g}$ y $\hat{b}$, y sea L la distancia entre el centro de masa y el eje de rotación, medida a lo largo de $\hat{b}$.
   a) Escriba el Lagrangeano del péndulo en el caso en que el cuerpo es un trompo simétrico, con momentos de inercia $I_1 = I_2 \neq I_3$, y con eje principal de inercia $\hat{e}_3$ perpendicular el eje de rotación $\hat{a}$.
   b) Escriba el Lagrangeano del péndulo en el caso general.
3. Calcule la frecuencia de oscilación de un péndulo físico arbitrario, cuando $\phi \ll 1$.