

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Precesión del eje de rotación terrestre.

Queremos estudiar el movimiento de rotación de la Tierra. Consideramos al planeta Tierra como un trompo simétrico de momentos principales de inercia $I_1 = I_2 = I_o$ e $I_3 > I_o$. El ángulo entre la velocidad angular de rotación de la Tierra y su eje principal de simetría e_3 es $\lambda \ll 1$.

1. De un valor numérico para la velocidad angular de rotación de la Tierra en torno a su eje de simetría.
2. Escriba las ecuaciones de Euler en la ausencia de torques.
3. Demuestre que ω_3 es constante.
4. Demuestre que ω_1 y ω_2 se rigen ambas por la ecuación de un oscilador armónico.
5. Demuestre que el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ precesa en torno al eje principal de inercia e_3 . Cuál es la frecuencia angular de precesión?
6. Calcule el período de precesión T_p del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ de la Tierra. Use como dato $(I_3 - I_o)/I_o \approx 3,3 \times 10^{-3}$.

II Límites de nutación de un trompo simétrico.

Considere un trompo simétrico de forma cónica con punta fija, masa m , altura h y radio basal $R = h$. Describimos la orientación del trompo usando los ángulos de Euler, α - rotación en torno al eje vertical de inercia e_3^o , β - ángulo entre e_3 y e_3^o (o sea en nutación), γ - spin, o rotación en torno al eje principal de simetría. El trompo se suelta desde un ángulo $\beta = \pi/3$, animado sólo con velocidad angular de rotación (spin) $\dot{\gamma} = (10/R) \sqrt{gd/3}$. Inicialmente $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$. Queremos calcular los ángulos límites de nutación, β_{\min} y β_{\max} .

1. Escriba la energía cinética del trompo en el sistema de inercia, pero usando velocidades generalizadas $\vec{\omega}$ relativas a los ejes principales de inercia.
2. Escriba el Lagrangeano del trompo cónico. {ayuda: puede suponer que $\gamma = 0$ en un instante en particular, de manera que $\omega_1 = -\sin(\beta)\dot{\alpha}$, $\omega_2 = \dot{\beta}$, $\omega_3 = \cos(\beta)\dot{\alpha} + \dot{\gamma}$ }.
3. Encuentre dos momentos generalizados conservados, y de estos despeje los valores de $\dot{\alpha}$ y $\dot{\gamma}$ dadas las condiciones iniciales.
4. Escriba ahora una expresión para la energía total del trompo, en función de β , de $\dot{\beta}$, y de las condiciones iniciales.
5. Defina un potencial efectivo relativo al problema unidimensional en β , y gráfiquelo cualitativamente.
6. Use el método del potencial efectivo para encontrar los ángulos límites de nutación.