FI22A-Sección 3 **Control 3** Prof: Simón Casassus

10 Noviembre 2005 3h Ayudantes: Nicolás Reyes, Martín Jacques

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Pequeñas oscilaciones.

Sean $V\left(\{q_i\}_{i=1}^{n}\right)$ y $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m\dot{x}_i{}^2$ las energías potencial y cinética que describen un sistema de N partículas con n grados de libertad, coordenadas cartesianas $x_j\left(\{q_i\}_{i=1}^{n}\right),\ j = 1, \ldots, 3N$, y coordenadas generalizadas $q_j\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right),\ j = 1, \ldots, n$. Elijimos un sistema de coordendas generalizadas tal que $\{q_i\}_{i=1}^{n} = 0$ en equilibrio.

1. ¿ A qué corresponden los "modos normales" del sistema?

2. Demuestre que en torno a los puntos de equlibrio T y V son formas cuadráticas,

$$V \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_{jk} q_j q_k \tag{1}$$

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \tag{2}$$

donde las matrices $\tilde{v}$ y $\tilde{m}$ son constantes y simétricas ($v_{jk} = v_{kj}$, $m_{jk} = m_{kj}$).

3. Usando las ecuaciones de Lagrange, muestre que las ecuaciones de movimiento son de la forma

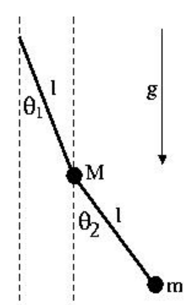
$$\sum_{k=1}^{n} \left(v_{lk} q_k + m_{lk}\ddot{q}_k\right) = 0, \qquad \forall\ l = 1, \ldots, n \tag{3}$$

4. Suponga soluciones oscilatorias $q_l = \rho_l e^{i\omega t}$ y muestre que la ecuación para las frecuencias características está dada por

$$\det(\tilde{v} - \omega^2 \tilde{m}) = 0. \tag{4}$$

Justifique en detalle su respuesta.

II Péndulo doble.



Considere un péndulo doble con igual longitud l y masas diferentes M y m que realiza pequeñas oscilaciones en un plano vertical, en un campo de gravedad constante, como se indica en la Figura.

1. Demuestre que la función de Lagrange es

$$L = \frac{1}{2}(M+m)l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - \frac{1}{2}(M+m)gl\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl\theta_2^2$$

2. Obtenga las ecuaciones de movimiento para las coordenadas θ_1 y θ_2 e interprete los términos de éstas. En particular, explique porque el término de acoplamiento de la ecuación para θ_1 es muy pequeño cuando $M \gg m$.

3. Muestre que las frecuencias propias del sistema están dadas por:

$$\omega^2 = \frac{\omega_o^2}{1 \pm \sqrt{\mu}},$$

donde $\omega_o = \sqrt{g/l}$ es la frecuencia natural de cada péndulo y $\mu = m/(m+M)$.

4. Obtenga los modos normales de oscilación y describa el movimiento de las masas para cada uno ellos. En particular, cuál es el cuociente entre las dos coordenadas?

5. Considere las siguiente condiciones iniciales: $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = C$. Demuestre que el movimiento subsiguiente es tal que a intervalos regulares un péndulo está en reposo y el otro oscila con amplitud máxima.

III Límite contínuo.

1. Consideramos un sistema mecánico discreto compuesto por N partículas de masa m en una cuerda de largo l, tensión τ y sin masa. Las partículas estan separadas por una distancia a cuando la cuerda esta en reposo.

   a) Muestre que la ecuación de movimiento para el desplazamiento transversal de las partículas es

   $$m\ddot{\mu}_i + \frac{2\tau}{a}\mu_i - \frac{\tau}{a}(\mu_{i+1} + \mu_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{5}$$

   con condición de borde $\mu_0 = \mu_{N+1} = 0$.

   b) Introducimos una función $\mu(x)$ tal que $\mu(x_i) = \mu_i$, en que x_i es la coordenada en reposo de la partícula i. Demuestre que para soluciones en modos normales de la forma $\mu(x) = \mathrm{Re}\,[A\exp(i(kx - wt))]$ es necesario que

   $$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma}\sin^2(ka/2).$$

   c) Aplique las condiciones de borde para obtener la forma exacta de los N modos normales, y el valor de las frecuencias de oscilación. Grafique los primeros 3 modos normales para el caso $N = 4$.

   d) ¿ Cuál es el significado físico de la existencia de una frecuencia de oscilación máxima?

2. Consideramos ahora el caso $N \to \infty$, $a \to 0$, manteniendo el largo de la cuerda constante: $a(N+1) = l$. Definimos la densidad lineal de masa $\sigma = m/a$.

   a) Demuestre, tomando el límite contínuo de la Ec. 5, que la ecuación de movimiento para el desplazamiento transversal de la cuerda es la ecuación de ondas. ¿ Cuál es la velocidad de propagación de las ondas?

   b) Obtenga las soluciones de la ecuación de ondas tomando el límite contínuo de las soluciones obtenidas en el caso discreto. Compruebe que las soluciones así obtenidas efectívamente satisfacen la ecuación de ondas.

   c) ¿ Existe una frecuencia de oscilación máxima en el caso contínuo? Compare en un gráfico las frequencias de oscilaciones entre los casos discretos y contínuos, considerando $N = 8$ en el caso discreto.