FI22A-Sección 3 **Examen** Prof: Simón Casassus

3 Diciembre 2005 3h Ayudantes: Nicolás Reyes, Martín Jacques

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Atenuación de una onda entrando en un medio viscoso

Estudiamos la propagación de ondas entrando en un medio dispersivo. Consideramos el caso de una cuerda infinita, oscilando libremente en $x < 0$, pero inmersa en un medio viscoso en $x \geq 0$. La densidad lineal σ y la tensión en la cuerda τ son constantes.

1. La ecuación que describe el desplazamiento transversal de la cuerda $u(x,t)$ para $x < 0$ es la ecuación de ondas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{en que } c = \sqrt{\tau/\sigma}.$$

   a) Dé una expresión para una onda desplazándose en dirección $+\hat{x}$ con desplazamiento $u(x)$ y velocidad transversal $v(x)$ en $t = 0$.

   b) Escriba la descomposición espectral de $u(x,t)$, es decir su transformada de Fourier en el sistema que se desplaza con la onda.

   c) Justifique que la densidad lineal de energía es $\epsilon = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ (ayuda: considere el trabajo ejercido por la tensión al estirar un elemento de cuerda).

   d) Calcule el flujo de energía $S = \epsilon c$ para una componente espectral con número de onda k y frecuencia angular ω.

2. Consideramos ahora la propagación de la onda en el medio viscoso.

   a) El roce ejercido por el medio viscoso sobre un elemento de cuerda de largo dx es $\vec{f} = -\chi\frac{\partial u}{\partial t}dx\hat{y}$, en que χ es constante y $\hat{y} = \vec{u}/|\vec{u}|$. Demuestre que la ecuación de movimiento para $u(x,t)$ en $x > 0$ es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

   b) Demuestre que la relación de dispersión en el medio viscoso es

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{i\chi\omega}{\tau} - k^2 = 0.$$

   c) Demuestre que ω es real, y concluya que $k = k_R + ik_I$ en el plano complejo. Dé unas expresiones para k_R y k_I en función de ω.

   d) Grafique cualitativamente $u(x, t = t_\circ)$ en $x > 0$, dado $u(x = 0, t = t_\circ)$.

   e) ¿ Cuál es la velocidad con la cual se puede propagar información en el medio viscoso?

3. Consideramos el caso de una onda monocromática con amplitud A incidiendo en $x = 0$ desde $x = -\infty$, con flujo de energía S_i. Al entrar en el medio parte de la onda es reflejada, con amplitud B y flujo S_r, mientras que otra parte es transmitida, con amplitud C y flujo S_t.

    a) Imponga continuidad de $u(x,t)$ y de $\partial u/\partial x$ para obtener unas relaciones entre A, B y C.

    b) Calcule los coeficientes de transmisión, $T = \langle S_t\rangle/\langle S_i\rangle$, y de reflección $R = \langle S_r\rangle/\langle S_i\rangle$, en que $\rangle\langle$ denota promedio temporal.

    c) ¿ Cuanta potencia es disipada por el medio viscoso en función de ω?

II Mecánica Analítica.

1. Principio de mínima acción.

    a) Muestre que la función $f(x)$ que extrema $I = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(f, f', x)dx$, con extremos fijos $f(x_1) = f_1$ y $f(x_2) = f_2$, es solución de la ecuación de Euler-Lagrange:

    $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial f'} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} = 0, \text{ en que } f' = \frac{df}{dx}.$$

    b) Enuncie el principio de mínima acción y demuestre que es una formulación de la mecánica alternativa a las 3 leyes de Newton.

2. Una masa m se encuentra unida al extremo de un resorte de largo natural $l_\circ$ y constante κ. El otro extremo del resorte se encuentra fijo al origen de coordenadas. El sistema se encuentra confinado al plano de una mesa, en presencia de gravedad. El resorte no se dobla, solo se estira y comprime.

    a) ¿ Cuales son las constricciones del sistema y cuantos grados de libertad tiene?

    b) Escriba el Lagrangeano del sistema usando coordenadas polares.

    c) Obtenga las ecuaciones de movimiento.

    d) Determine los momentos generalizados p_r y p_θ asociados a las coordenadas polares.

    e) Determine las cantidades conservadas.