FI22A-Sección 2 **Control 1** Prof: Simón Casassus

7 Septiembre 2006 Ayudante: Francisco Collarte

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

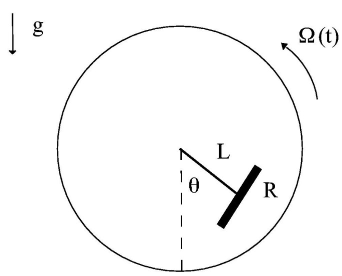
I Principio de mínima acción.

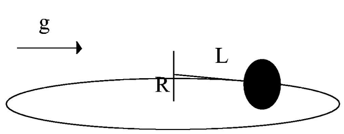
1. Muestre que la función $f(x)$ que extrema $I = \int_{x_1}^{x_2} \Phi(f, f', x)dx$, con extremos fijos $f(x_1) = f_1$ y $f(x_2) = f_2$, es solución de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial f'} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} = 0, \text{ en que } f' = \frac{df}{dx}.$$

2. Enuncie el principio de mínima acción y demuestre que es una formulación de la mecánica alternativa a las 3 leyes de Newton, considerando el caso de N partículas interactuantes, con potencial $U(\{\vec{r_i}\}_{i=1}^{N}) = \sum_{i,j\neq i} \phi(\vec{r_i} - \vec{r_j})$.

II Cuerpos rígidos.





Un disco de radio R y masa M se encuentra apoyado sobre una superficie vertical que gira con velocidad angular $\Omega(t)$ no constante. El contacto es tal que el disco rueda sobre su eje, sin resbalar sobre la superficie. Además, el disco se encuentra sujeto al punto O por una vara sin masa de largo L.

1. `( 4 pt)` encontrar la ecuación de movimiento para el ángulo θ que forma el eje del disco respecto a la vertical.

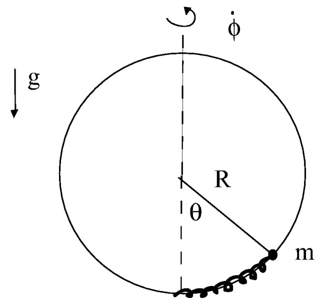
2. `( 1 pt)` Si $\Omega(t) = \alpha$t, con α constante, encuentre los ángulos de equilibrio, tales que θ sea constante.

3. `( 1 pt)` Determine la estabilidad de los puntos de equilibrio (si $d^2\theta/dt^2 = F(\theta)$, estudie el signo de $dF(\theta)/d\theta$).

Nota: El tensor de inercia de un disco de masa M y radio R respecto de su centro de masa es :

$$I = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

III Partícula en un aro.



Una masa puntual m puede deslizar sin roce sobre un anillo de radio R colocado en posición vertical en el campo gravitacional terrestre. El anillo gira con velocidad angular constante sobre un eje vertical que pasa por su centro y la masa m esta unida a un resorte de constante k fijo al otro extremo en el punto mas bajo del anillo. El resorte tiene largo natural $R\theta_\circ$.

1. `( 2 pt)` Escriba el Lagrangeano del sistema.
2. `( 2 pt)` Escriba las cantidades conservadas del sistema.
3. `( 1 pt)` Defina un potencial efectivo para el sistema, tal que $d^2\theta/dt^2 = -dV_{\text{eff}}(\theta)/d\theta$.
4. `( 1 pt)` Determine puntos fijos, con θ constante, y estudie su estabilidad (i.e. estudie el signo de $d^2V_{\text{eff}}(\theta)/d\theta^2$)