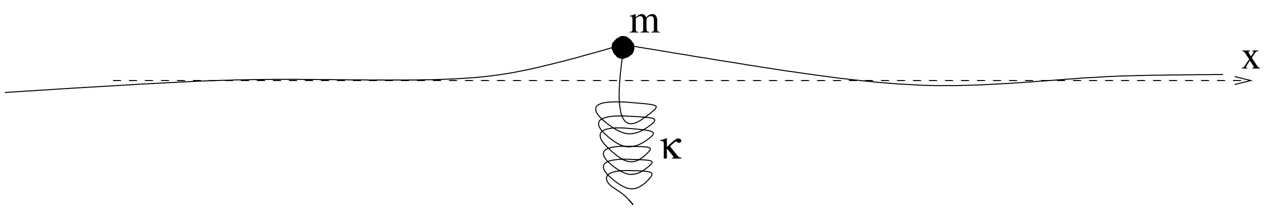
FI21B-Sección 2 **Examen** Prof: Simón Casassus

2 Diciembre 2006 Ayudante: Francisco Collarte

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Transmisión de señales a través de un oscilador

Consideramos una cuerda infinita con densidad lineal de masa σ constante, que coincide con el eje x en ausencia de pequeñas oscilaciones. Una masa m divide la cuerda en $x = 0$, en el extremo de un resorte orientado en dirección y. El largo natural del resorte deja la masa en $(x, y) = (0, 0)$, y su constante es κ. El movimiento de la masa y el desplazmiento transversal la cuerda $u(x, t)$ estan confinado al plano horizontal (x, y), perpendicular a la vertical dada por la dirección de gravedad.



1. `(3 pt)` Consideramos el problema de transmisión de una onda monocromática proveniente de $-\infty$, con amplitud A, número de onda k y frecuencia angular ω.

   a) Escriba las condiciones de borde en el origen, que permiten calcular la relación entre la amplitud transmitida C y la incidente A.

   b) Justifique que el flujo de energía en la cuerda es $\langle S\rangle = \epsilon c$, en que $\epsilon = \langle \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\rangle$, y que en el caso de la onda incidente, $\langle S\rangle = \frac{1}{2}\tau k^2 c\|A\|^2$.

   c) Dado que Muestre que el coeficiente de transmisión es

$$T(k) \equiv \langle S_{\text{transmitido}}\rangle / \langle S_{\text{incidente}}\rangle = 1/\left[1 + \left(\frac{mc^2k^2 - \kappa}{2\tau k}\right)^2\right].$$

   d) Discuta el comportamiento de $T(\omega)$.

2. `( 3 pt+)` Consideramos ahora una señal proveniente de $-\infty$, tal que $u_{\text{inc}}(x, t) = u_\circ \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-ct)}{\sigma^2}\right]$.

   a) ¿ Cuál es la relación de dispersión de la cuerda en $x \neq 0$? ¿ Es un medio dispersivo? ¿ Con que velocidad y en que dirección se desplaza la señal?

   b) `(optativo)` La descomposición espectral de $u(x, t)$ es $u_{\text{inc}}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp(i(kx - \omega t))$. Muestre que el espectro incidente también es una Gaussiana,

$$A(k) = \frac{u_\circ}{\sqrt{2\pi}}\sigma \exp\left[-\frac{1}{2}(k^2\sigma^2)\right], \quad \text{con dispersión } \sigma_k = 1/\sigma.$$

   c) Escriba una expresión para la energía total de la señal incidente, en $t \to -\infty$.

   d) Escriba el espectro transmitido, $C(k)$.

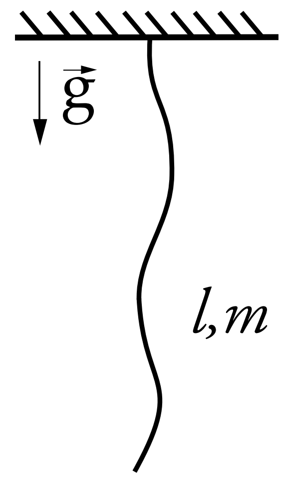
e) Escriba una expresión que permita calcular la forma de la señal transmitida en $x > 0$, $u_{\text{trans}}(x, t)$.

f) Escriba una expresión para la energía transmitida por el oscilador, en $t \to +\infty$.

IIa Cuerda Colgante

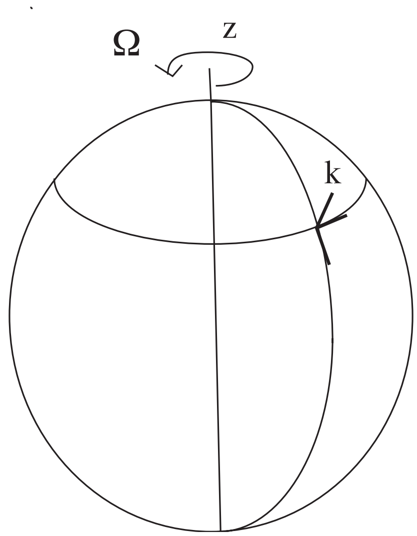
Una cuerda de largo l y masa m se encuentra sostenida verticalmente por su extremo superior, como lo muestra la figura, y está bajo la influencia de la gravedad.

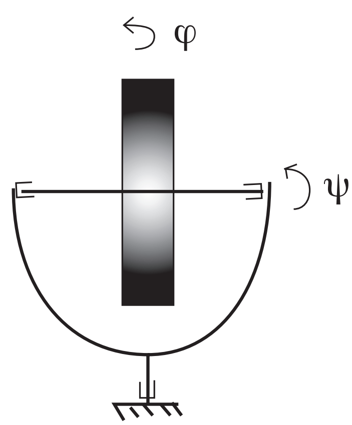
1. Encuentre la tensión en cada punto de la cuerda.
2. Deduzca la ecuación de la cuerda para desplazamientos horizontales.
3. ¿ Qué condiciones de borde cumple la cuerda?.
4. ¿ Cómo se modifica la ecuación y las condiciones de borde si sobre el extremo inferior de la cuerda se cuelga un cuerpo de masa M_0?



IIb La brújula de Foucault

La brújula de Foucault consiste en un disco que gira rápidamente alrededor de un eje que además puede girar libremente en un plano horizontal (ver figura). Analice el movimiento de la brújula ubicada en la latitud α (osea, el ángulo que forman el eje z con el eje k es $\pi/2 - \alpha$). Considere que la velocidad angular de la tierra Ω es mucho menor que la de rotación con respecto al eje. Eliga los ángulos φ entre el eje del disco y la dirección que apunta al norte, y ψ el que describe la rotación con respecto a su eje. Determine la dinámica de φ en el límite mencionado.





III Modelo de amortiguadores

Un bloque uniforme de masa m, largo a y altura b está sostenido por dos resortes, uno en cada extremo. Las constantes elásticas de los resortes son k_1 y k_2, con $k_1 = k_2 = k$. Los resortes se mantienen verticales.

- `( 1.5 pt)` Encuentre el momento de inercia del bloque y escriba el Lagrangeano.
- `( 1.0 pt)` Encuentre las frecuencias propias del sistema.
- `( 1.0 pt)` Encuentre los modos normales de oscilación del sistema.
- `( 1.0 pt)` Encuentre un sistema de coordenadas generalizadas que permita desacoplar el Lagrangeano.
- `( 1.5 pt)` En $t = 0$ el sistema está en su posición de equilibrio, pero el bloque es impulsado con velocidad $v_\circ$ hacia arriba en el punto de contacto con el resorte izquierdo. Calcule y grafique la trayectoria del sistema.