FI22A-Sección 3 | **Control 1** | Prof: Simón Casassus

22 Agosto 2002 | 3 horas | Ayudantes: Antonio Hales, Ismael Vergara

Relaciones útiles:

Distribución binomial y su aproximación para $N \gg 1$ (probabilidad de n eventos con probabilidad p en N experimentos):

$$
\begin{aligned}
P(n) &= \frac{N!}{n!(N-n)!} p^N q^{N-n}, \text{ en que } q = 1 - p, \\
P(n) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi N p q}} \exp\left[-\frac{(n-Np)^2}{2Npq}\right],
\end{aligned}
$$

Valores medios para una distribución g:

$$
\langle f(x) \rangle = \int dx \; g(x) f(x) / \int dx \; g, \quad \text{y,}
$$

$$
\sigma \equiv \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle .
$$

Distribución Gaussiana: $g(x) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \langle x \rangle\right)^2 / \sigma^2\right]$
Distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$
P(\vec{r}, \vec{v}) d^3r d^3v = \frac{\exp\left(-\frac{E(\vec{r},\vec{v})}{kT}\right) d^3r d^3v}{\int d^3r d^3v \exp\left(-\frac{E(\vec{r},\vec{v})}{kT}\right)}.
$$

I Gas ideal monoatómico en un campo de energía potencial.

Sea A una de las paredes de un recipiente con volumen V que contiene un gas ideal monoatómico con N partículas, de densidad $n = N/V$ y temperatura T. Consideramos el espacio reportado al triedro directo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, en que $\hat{z}$ es paralelo a la normal en la pared A.

1. Encuentre el número de partículas que chocan en un tiempo Δt en A, con velocidades orientadas en direcciones que forman un ángulo con el eje $\hat{z}$ entre θ y $\theta + d\theta$ (coordenadas esféricas), y con módulo de velocidades entre $\vec{v}$ y $\vec{v} + d\vec{v}$.

2. Deduzca, a partir de la distribución de velocidades de Maxwell, la ley de gas ideal $p = nkT$ suponiendo que las partículas chocan elásticamente con la pared.

3. Relacione la energía total promedio del gas con el número de partículas y la temperatura T (recordar que la energía total promedio es la suma de las energías promedios de todas las partículas).

4. Las partículas se mueven con energía potencial nula, salvo por unas zonas en las cuales adquieren una cierta energía potencial $V_\circ > 0$. El tamaño y la forma de las zonas de alta energía potencial es cualquiera, y el volumen total ocupado por estas zonas es una fracción f de V. Cual es la energía total promedio del gas en este caso?

5. Explicar físicamente por qué si $V_\circ \to +\infty$, y si $V_\circ = 0$, la energía total del gas en el campo de energía potencial se reduce a la expresión deducida en 3.

II Difusión y marcha aleatoria.

Estudiamos el desplazamiento $\vec{R}$ de una molécula desde el origen del espacio reportado al triedro directo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, en el cual no hay dirección preferida. La molécula se desplaza en línea recta hasta chocar con otra molécula, de manera que $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{s}_i$ despues de N choques.

1. Cual es el desplazamiento promedio $\langle \vec{s} \rangle$ entre choques? Cual es el desplazamiento total promedio $\langle \vec{R} \rangle$?

2. Calcule la desviación estandard del desplazamiento de la molécula, $\sigma(\vec{R})$, si el modulo del desplazamiento entre choques es una constante $||\vec{s}|| = l$ (note que l es, por definición, el libre camino medio).

3. Nos restringimos ahora al caso unidimensional, en el cual la molécula se mueve una distancia l entre choques, hacia $+\hat{x}$ o hacia $-\hat{x}$, con igual probabilidad . Cual es la probablidad de encontrar la molécula a una distancia nl del origen (n natural), despues de N choques?

4. Use el teorema de equipartición para estimar el tiempo promedio τ entre colisiones en función de l y de la masa m y temperatura T de la molécula.

5. Cual es número de choques que ocurren en un tiempo t, suponiendo que $\vec{R} = 0$ en $t = 0$? Si $t \gg \tau$, escriba una expresión para la probabilidad $P(x, t)$ de encontrar la molécula en la coordenada x, después de un tiempo t (aproxime la probabilidad obtenida en el punto 3 por una probabilidad continua).

6. Demuestre que $P(x, t)$ es solución de la ecuación de difusión 1D,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$

   e identifique el coeficiente de difusión D en función de l y τ.