FI22A-Sección 3 | **Control 2** | Prof: Simón Casassus
26 Septiembre 2002 | 3 horas | Ayudantes: Antonio Hales, Ismael Vergara

Tres problemas a elección

Relaciones útiles:

Fórmula de Stirling: $N! \approx N \ln N - N$, si $N \gg 1$. Primera ley para proceso infinitesimales: $dE = TdS - pdV$.

I Aumento de entropía al llevar dos sistemas a equilibrio térmico.

Un sistema A con volumen constante, inicialmente a una temperatura T_1, y con capacidad calórica C_V, está en contacto con un reservorio $A_\circ$ a temperatura constante T_0. El sistema $\{A + A_\circ\}$ está aislado.

1. Considere el proceso cuasiestático que conduce $\{A + A_\circ\}$ al equilibrio. Que forma de intercambio energético, trabajo o calor, toma un cambio infinitesimal de las energías internas de A y de $A_\circ$? Relacionar el aumento de energía interna de A con su incremento de temperatura dT. En cuanto cambia la energía interna de $A_\circ$?

2. Si C_V no depende de T, calcular el aumento de entropía de A al concluir el proceso que lleva los dos sistema al equilibrio.

3. Calcular el aumento de entropía de $A_\circ$, y mostrar que el aumento de entropía del sistema $A + A_\circ$ es

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_0}{T_1} - C_V \frac{T_0 - T_1}{T_0},$$

   y que $\Delta S > 0$.

II Modelo de banda elástica.

Una banda elástica se dilata al *enfriarse*. Cualitativamente, esto se debe a que se enrollan los largos polímeros que componen la banda al aumentar su agitación térmica. Se encoje la banda porqué se doblan los polímeros al chocar entre ellos. Queremos estudiar este fenómeno modelando los largos polímeros por una sola cadena de segmentos. Consideramos una cadena de largo total L, orientada paralelamente a un eje de coordenadas x, compuesta por N segmentos, cada uno de los cuales tiene largo a. Hay n_1 segmentos en direccion $+\hat{x}$, y n_2 en dirección $-\hat{x}$, de manera que $L = an_1 - an_2$ y $N = n_1 + n_2$.

1. Un estado de la cadena con largo L y número de segmentos N está caracterisado por (n_1, n_2). Explicar porqué hay $N!/(n_1!n_2!)$ estados posibles para L y N dados.

2. Si los segmentos no tienen orientación privilegiada, calcular la entropía de la cadena $S = k \ \ln \Omega$, en que Ω es el número de estados accesibles a la cadena. Exprese S en función de a, N, y L, si $N \gg 1$.

3. Un extremo de la cadena está amarrado a una pared, y sometemos la cadena a una tensión R tirandola del otro extremo. La cadena se mantiene a temperatura constante T, poniendola en contacto con un reservorio de temperatura (la pared, por ejemplo). Hacemos la analogía entre la cadena y un gas identificando el largo L con volúmen, y la tensión R con presión (por -1). Escribir dE, y dF, en que $F = E - TS$ es la energía libre de la cadena. Relacionar la tensión R con derivadas parciales de F.

4. La energía de la cadena no depende de L, porqué no hay diferencia de energía entre las dos orientaciones posibles de cada segmento (son igualmente probables), de manera que $\partial E/\partial L|_T = 0$. Calcular R en función de a, N, L, y T.

5. Muestre que recuperamos cuantitativamente el fenómeno de contracción de la cuerda a mayor T. Aproxime $L \ll Na$, y recupere la ley de Hooke.

6. Para puntos extras. Un problema de este modelo es que la energía y la temperatura de la cadena no estan definidas. Sugerir un modelo más sofisticado, en que la energía de la cadena este definida en función de sus propiedades microscópicas.

III Temperatura y entropía.

Considere un sistema A, con energía E, entropía $S = k \ln \Omega$ y Ω estados igualmentes probables, en equilibrio con un reservorio de temperatura A'. Si la temperatura es

$$\beta = \frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E},$$

demostrar que el valor mas probable de E corresponde al máximo de entropía de $\{A + A'\}$, que $\beta = \beta'$, y calcular la probabilidad que A esté en un cierto estado r con energía E_r. Si A es un gas ideal, calcule la energía media de una de sus N moléculas, y compare con $\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2}kT$.

IV Paramagnetismo.

Un sólido, compuesto por N átomos de espin 1/2, está colocado en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. El efecto del campo magnético es agregar a la energía interna del sólido $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$, en que $\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mu}_i$ es la suma de los momentos magnéticos de cada átomo. Para un átomo con espin 1/2, $\vec{\mu}$ es paralelo o antiparalelo a $\vec{B}$, i.e. $\vec{\mu} = +\mu\hat{z}$ o $\vec{\mu} = -\mu\hat{z}$.

1. Si el sólido se mantiene a una temperatura T, y si la energía de un átomo es $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, escriba las probabilidades P_1 y P_2 asociadas con los dos estados energéticos de un átomo (use la estadística de Boltzmann, $P \propto^{-\beta E}$).

2. Muestre que el momento magnético medio de un átomo es $\langle \mu \rangle = \mu \operatorname{tgh}\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$, y escribir $\vec{M}$.

3. Explique porqué si $kT >> \mu B$, $M \sim 0$, y el sólido es insensible a un campo magnético (si $M \neq 0$, el sólido se mueve hacia regiones de campo mas intenso para minimisar su energía U).

4. Si n_1 y n_2 espines apuntan hacia arriba y hacia abajo, $U = -(n1 - n2)\mu B$, y $N = n_1 + n_2$. Calcule $\Omega = N!/(n_1!n_2!)$, el número de estados accesibles al sistema, en función de N, U, μ y B.

5. Para puntos extras: Use la fórmula de Stirling para aproximar $\ln \Omega$, y muestre que al calcular $\beta = \partial \ln \Omega/\partial U$ se recupera el resultado para $\|\vec{M}\|$ del punto 2.