FI22A-Sección 3 | **Examen** | Prof: Simón Casassus

31 Octubre 2002 | 3 horas | Ayudantes: Antonio Hales, Ismael Vergara

Relaciones útiles:

Energía interna de un gas ideal: $U = 3/2NkT$. Ecuación de estado para un gas ideal: $PV = NkT$. Primera ley para procesos infinitesimales, $dU = TdS - pdV$. Distribución de Maxwell-Boltzmann: $P(\vec{r},\vec{v})d^3rd^3v = \exp\left(-\frac{1}{kT}E(\vec{r},\vec{v})\right)d^3rd^3v/\int d^3rd^3v \exp\left(-\frac{1}{kT}E(\vec{r},\vec{v})\right)$. $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$.

I Efusión y teoría cinética del gas ideal.

Queremos destacar algunas consecuencias de la distribución de velocidades de las partículas en un gas ideal:

$$\rho(\vec{v})d^3v = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^3}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)d^3v, \tag{1}$$

donde σ es la dispersión de la gaussiana, y donde llamamos $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ al vector velocidad, con norma v.

1. Cual es el intervalo de variación de v_x? Cuanto vale su valor medio $\langle v_x\rangle$, y $\langle v_x^2\rangle$? Expresar $\langle v_x^2\rangle$ en función de $\langle v^2\rangle$.

2. Dar la expresión de σ en función de la temperatura T del gas y de su masa por mol M. Escriba la ley de distribución, Ec. 1, en términos de T y M. Trazar en un mismo gráfico la curva $\rho(v_x)$ para un gas de masa molar M a las temperaturas $T_\circ$ y $4T_\circ$.

3. N_1 moléculas de este gas estan inicialmente encerradas en un recipiente con volumen V, libre de intercambiar calor con su entorno. Sea p_1 la presión y $n_1 = N_1/V$ el número de moléculas por unidad de volumen. El medio exterior es un reservorio de temperatura y presión, esta constituido por el mismo gas, a la temperatura T, pero con presión $p_0 < p_1$ y con densidad n_0. Expresar las presiones dentro y fuera del recipiente en función de n_1 y n_0, respectivamente, en una situación de equilibrio.

4. Consideramos ahora un pequeño elemento de superficie dA en una de las paredes del recipiente, con un vector normal paralelo a Ox. En un modelo simple, atribuimos a todas las moléculas el mismo valor para $\|v_x\| = \sqrt{\langle v_x^2\rangle}$, y suponemos que la mitad se desplaza hacia la pared, y la otra en sentido opuesto. Dar la expresión de dN_1, el número de moléculas que chocan con el elemento de area dA en un intervalo de tiempo dt.

5. Perforamos en $t = 0$ el elemento de area dA.

   (a) Cual es dN_1, el número de partículas que salen del recipiente, y dN_0, el número que entran, en el intervalo $[t, t+dt]$? Deducir la variación total dN del número de moleculas contenidas en V.

   (b) Determinar $N(t)$, la ley de evolución del número total de moléculas contenidas en V durante el tiempo t, y $p(t)$, la ley de variación de la presión interna. Dibujar la curva $p(t)$.

II Entropía de mezcla.

En este problema estudiamos dos procesos conducentes a la mezcla de gases ideales.

1. La mezcla libre de dos gases distintos, inicialmentes confinados a sectores separados de un volumen V (Fig. 1), en que la separación permite el equilibrio mecánico entre los dos sectores (o sea no esta fija).

   (a) Muestre que la entropía de un gas ideal de N particulas, relativa a la de un estado de referencia $(T_\circ, V_\circ)$, es
   $$S = \frac{3}{2} Nk \log(T/T_\circ) + Nk \log(V/V_\circ).$$

   (b) Retiramos la separación entre los dos gases. Expresar la variación de entropía del sistema en función del número de partículas de cada gas. Es este un proceso reversible o irreversible (explique)?

2. La distinguibilidad de las moleculas permite, en principio, diseñar paredes con porosidad selectiva a cada molecula, de manera a separar o mezclar dos gases reversiblemente (Fig. 2). Partimos de la misma situación que en la Fig 1, pero esta vez las paredes son díatérmicas. Mezclamos reversiblemente los dos gases, manteniendo el sistema en contacto con un reservorio térmico, y aplicando unas presiones en las paredes porosas iguales a las las presiones parciales P_1 y P_2 de los gases en la región comun.

   (a) ¿ Cuanto es la variación de energía interna del sistema? Calcule el trabajo ejercido por el sistema, y el calor intercambiado con el reservorio de temperatura.

   (b) ¿ Cuanto es la variación de entropía del sistema (use la parte 2a)? Como compara con el resultado del proceso en la parte 1b? Calcule la variación de entropía del universo (el sistema y su entorno). Explicar por qué este es un proceso reversible.

Figura 1: Mezcla libre

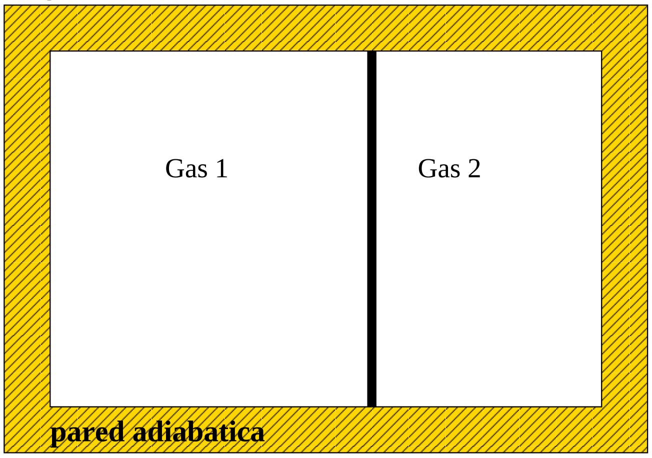

Figura 2: Mezcla reversible