1
Problemas, teoría cinética

1. **Ecuación de estado y compresión adiabática del gas ideal.**

   (a) Sea A una de las paredes de un recipiente que contiene un gas ideal. Consideramos el espacio reportado al triedro directo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, en que $\hat{z}$ es paralelo a la normal en la pared A. Encuentre el número de partículas que chocan en un tiempo Δt en A, con velocidades orientadas en direcciones que forman un ángulo con el eje $\hat{z}$ entre θ y $\theta + d\theta$ (coordenadas esféricas), y con modulo de velocidades entre $\vec{v}$ y $\vec{v} + d\vec{v}$.

   (b) Deduzca la ley de gas ideal $p = nkT$ calculando la presión ejercida sobre la pared, suponiendo que las partículas chocan elásticamente con la pared.

   (c) Consideramos ahora una compresión/dilatación adiabática del gas, en que la pared A es ahora un pistón que se mueve con velocidad $\vec{v_p}$ mucho menor que cualquiera de las velocidades de las partículas.

      i. Muestre que la cantidad de energía perdida por el gas en el choce de una partícula de masa m con la pared es
      $$\delta E = -2mv_z v_p,$$
      en el sistema de referencia ligado al laboratorio (ayuda: en el sistema ligado al pistón, el choque es elástico, y haga explicita la hipotesis adiabática).

      ii. Sumando sobre todas las partículas que chocan con el pistón en un tiempo Δt, muestre que la cantidad de energía perdida por el gas es
      $$\Delta E = -\frac{1}{3}mn\left\langle v^2\right\rangle \underbrace{S\Delta t v_p}_{\Delta V},$$
      en que ΔV es el incremento de volumen en el tiempo Δt.

      iii. Ligue la relación deducida anteriormente con la energía total del gas, y llegue a
      $$-\frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{\Delta E}{\Delta V}.$$

      iv. Demuestre que en la compresión adiabática de un gas ideal tenemos la relación
      $$PV^{\frac{5}{3}} = \text{Constante}.$$

2. **Ecuación de estado y energía total de un gas ideal en un campo de energía potencial.**

   Consideramos un volumen V con un gas ideal, en el cual las partículas se mueven con energía potencial nula, salvo por unas zonas en las cuales adquieren una cierta energía potencial $V_\circ > 0$. El tamaño y la forma de las zonas de alta energía potencial es cualquiera, y el volumen total ocupado por estas zonas es una fracción f del V. Se pide mostrar que la energía total media del gas es,
   $$E = \frac{3}{2}kTN + \frac{NV_\circ f e^{-\beta V_\circ}}{f e^{-\beta V_\circ} + (1-f)},$$
   y explicar físicamente por qué si $V_\circ \to +\infty$ o si $V_\circ = 0$ se recupera la expresión para el gas ideal, $E = \frac{3}{2}NkT$. (Ayuda: recordar que la energía total promedio es la suma de las energías promedios de todas las partículas).