FI22A-Secciones 3 y 4 Profs: Luis Campusano & Simón Casassus,
4 Diciembre 2003 Ayudantes: Ignacio Donoso, Matías Egaña, Francisco Förster

Examen –**Parte II**: 1h45m, dos problemas a elección

Relaciones útiles:

$R = 8{,}31$ J mol$^{-}1$ K^{-1}. Cero absoluto: -273.15 °C.
Distribución de Maxwell-Boltzmann: $P(\vec{v})d^3\vec{v} = \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d^3\vec{v} / \int d^3\vec{v} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$

I Obtención de bajas temperaturas mediante vacío

El Helio líquido hierve a $T_\circ = 4{,}2$ K cuando su presión es $P_\circ = 1$ atm= 101325 N m^{-2}, con un calor latente de vaporización $L = 8{,}5\ 10^4$ J/kmol (i.e. por *kilo*mol). El líquido está contenido en un recipiente diseñado para mantenerlo aislado térmicamente. Debido a que la aislación no es perfecta, una cantidad de calor $(\delta Q/\delta t)$, en J s^{-1}, fluye hacia el líquido, evaporándolo. Con el fin de bajar la temperatura se reduce la presión del vapor de He sobre la superficie del líquido, mediante una bomba que trabaja a temperatura ambiente $T_r = 300$ K (el vapor de He alcanza dicha temperatura al alcanzar la bomba). La bomba puede remover hasta $(\delta V/\delta t)$ lt s^{-1}.

1. (2 p) Calcular la presión de vapor mínima P_m que puede mantener la bomba en la superficie del líquido.

2. (2 p) Si el líquido es mantenido en equilibrio con el vapor a la presión P_m, calcule aproximadamente la temperatura mínima T_m del líquido (establezca claramente los supuestos y simplificicaciones que haga).(Hint: utilice la ecuación de Clausius-Clapeyron).

3. (2 p) A fin de estimar cuan baja es la temperatura T_m que puede lograrse en la práctica, suponga que se dispone de una bomba con $\delta V/\delta t = 70$ lt s^{-1}. Un flujo típico de calor evapora 0.05 lt de Helio por hora (la densidad del Helio líquido es 145 kg/m^3 y su peso molecular es 4 kg/kmol). Estime la temperatura T_m que se puede lograr bajo estas condiciones experimentales.

II Distribución de velocidades en un gas ideal

1. (3 p) Sea un sistema de N_T moléculas de masa m, en equilibrio a temperatura T.

   a) Demuestre que el número de moléculas con rapidez $v \in [0, v_\circ]$, inferior o igual a un cierto valor arbitrario $v_\circ$, está dado por:

   $$N(v_\circ) = N_T \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{u_\circ} \exp(-u^2)du - u_\circ \exp(-u_\circ^2) \right) \right],$$

   donde $u_\circ = v_\circ / \sqrt{2kT/m}$.

u	0.0	0.4	1.0	2.0	...	∞
$B(u)$	0.0000	0.4282	0.8427	0.9953	...	1.0000

Cuadro 1: $B(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-v^2) dv$ para valores seleccionados de u

b) Evalúe, usando el Cuadro 1, qué fracción de moléculas tiene rapidez menor of igual a la rapidez más probable v_m, y represéntelo gráficamente.

2. `(3 p)` Atmósferas planetarias (o lunares). Considerando un cuerpo de masa M y radio R, la relación que existe entre la rapidez cuadrática media $v_{\rm rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ para una especie molécular dada, y la velocidad de escape v_e del cuerpo, determina si la atmósfera puede o no retener dicha molécula. Si $v_{\rm rms} = v_e$ entonces el cuerpo perderá el gas en unos pocos días. En cambio, para retener un gas por millones de años, se debe satisfacer la condición $v_e \geq 10\ v_{\rm rms}$. Demuestre entonces que la condición de retención de dicho gas, con moléculas de masa m, a temperatura T, está dada por:

$$T \leq \frac{GMm}{100kR},$$

donde G es la constante universal. (Nota: T está determinada por la distancia al Sol, y este argumento límita el valor de m, en acorde con las composiciónes químicas observadas. Por ejemplo planetas con orbitas mayores a las de Jupiter pueden retener H y He).

III Acondicionador de aire en regimen estacionario

Un acondicionar de aire opera en ciclos de Carnot como refrigerador entre las temperaturas exterior T_e y la temperatura interior (de una pieza) $T_i < T_e$. El recinto recibe calor desde el exterior a una tasa de $A(T_e - T_i)$, en J/s. La potencia suministrada al acondicionador es $\delta W/\delta t$. Se pide:

1. `(4 p)` Demostrar que la temperatura de equilibrio de la pieza es:

$$T_i = \left(T_e + \frac{\delta W/\delta t}{2A}\right) - \left[\left(T_e + \frac{\delta W/\delta t}{2A}\right)^2 - T_e^2\right]^{1/2}.$$

2. `(1 p)` Si $T_e = 30°\mathrm{C}$ y la temperatura del recinto se mantiene constante a $20°\mathrm{C}$ empleando una potencia de 2 kW, encontrar el coeficiente de transferencia de calor A.

3. `(1 p)` Se sabe que las máquinas 'reales' siempre tienen fuentes de irreversibilidad, y por lo tanto la eficiencia de un refrigerador de Carnot es en realidad un comportamiento límite. Modifique la expresión en el Punto 1 para que se tenga en cuenta este comportamiento límite.