FI22A-Sección 1 **Control 1** Prof: Simón Casassus

27 Diciembre 2004 Ayudante: Sebastian Perez

(Desarrolle sus respuestas más allá de limitarse a sólo escribir ecuaciones, y cuide la presentación.)

Relaciones útiles:

Distribución binomial y su aproximación para $N \gg 1$ (probabilidad de n eventos con probabilidad p en N experimentos):

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^N q^{N-n}, \text{ en que } q = 1 - p,$$
$$P(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left[-\frac{(n-Np)^2}{2Npq}\right],$$

Distribución Gaussiana: $g(x) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \langle x \rangle)^2 / \sigma^2\right]$, con $\sigma \equiv \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$.

I Difusión y marcha aleatoria.

Estudiamos el desplazamiento $\vec{R}$ de una molécula desde el origen del espacio reportado al triedro directo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, en el cual no hay dirección preferida. La molécula se desplaza en línea recta hasta chocar con otra molécula, de manera que $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{s}_i$ despues de N choques.

1. Cual es el desplazamiento promedio $\langle \vec{s} \rangle$ entre choques? Cual es el desplazamiento total promedio $\langle \vec{R} \rangle$?
2. Calcule la desviación estandard del desplazamiento de la molécula, $\sigma(\vec{R})$, si el módulo del desplazamiento entre choques es una constante $\|\vec{s}\| = l$ (note que l es, por definición, el libre camino medio).
3. Nos restringimos ahora al caso unidimensional, en el cual la molécula se mueve una distancia l entre choques, hacia $+\hat{x}$ o hacia $-\hat{x}$, con igual probabilidad . Cual es la probablidad de encontrar la molécula a una distancia nl del origen (n natural), despues de N choques?
4. Use el teorema de equipartición para estimar el tiempo promedio τ entre colisiones en función de l y de la masa m y temperatura T de la molécula.
5. Cual es número de choques que ocurren en un tiempo t, suponiendo que $\vec{R} = 0$ en $t = 0$? Si $t \gg \tau$, escriba una expresión para la probabilidad $P(x, t)$ de encontrar la molécula en la coordenada x, después de un tiempo t (aproxime la probabilidad obtenida en el punto 3 por una probabilidad continua).
6. Demuestre que $P(x, t)$ es solución de la ecuación de difusión 1D,
$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$
e identifique el coeficiente de difusión D en función de l y τ.

II Ecuación de estado y energía interna del gas ideal

1. Un recipiente de volumen V contiene un gas ideal con N partículas a temperatura T. Calcule la presión P ejercida sobre las paredes del recipiente a partir de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann. Obtenga asi la ecuación de estado de un gas ideal, $PV = NkT$.
2. Demuestre que la energía interna del gas es $E = 3/2NkT$ (ayuda: calcule primero la energía cinética promedio por partícula);