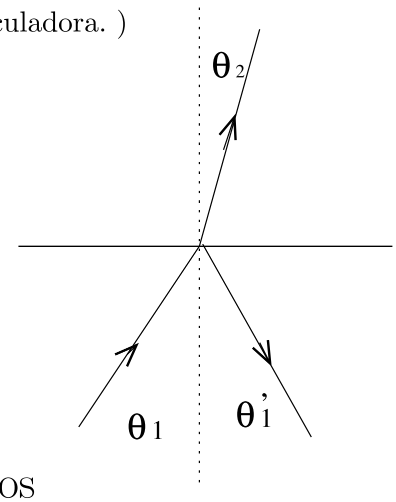
FI2A2-2 2008B — **Examen** — Prof: Simón Casassus
25 de Noviembre de 2008 — 3 h — Ayudante: Felipe Benavides

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)



Relaciones útiles:

$\vec{D} = \epsilon\epsilon_\circ\vec{E}$ $\vec{B} = \mu\mu_\circ H$, $\mu_\circ = 4\pi\ 10^{-7}$ T m A^{-1},
$\vec{B} = \frac{\mu_\circ}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')\|\vec{r} - \vec{r}'\|^{-3} d^3x'$
Fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j_l} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$
$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$.

I Transmisión de ondas electromagnéticas en dieléctricos

En este problema consideramos la transmisión de una onda electromagnética en la interfaz (en el plano $z = 0$) entre dos medios con constantes diélectricas distintas ϵ_1 y ϵ_2, como se indica en la figura.

1. `(1.0pt)` Obtenga la ecuación de ondas partiendo de las ecuaciones de Maxwell, y deduzca la velocidad de propagación c en un medio con constantes ϵ y μ.

2. `(1.0pt)` Demuestre que para una onda plana monocromática $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E}/c$, en que $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda.

3. `(1.5pt)` Una onda plana monocromática incide en la interfaz entre dos dieléctricos. Distinguimos la onda incidente, con vector de onda $\vec{k_1}$ de la ondas reflejada, $\vec{k_2}'$, y transmitida, $\vec{k_2}$. Demuestre, a partir de las ecuaciones de Maxwell, que las condiciones de continuidad en la interfaz, en ausencia de cargas y corrientes libres, son $E_\parallel$ y $B_\perp$ continuos.

4. `(0.5pt)` Escriba las condiciones de continuidad para el caso en que la onda incidente es una onda plana monocromática (ayuda: si $\hat{n}$ es la normal a la interfaz, las componente perpendiculares y paralelas estan dadas por $\hat{n}\cdot$ y $\hat{n}\times$, respectivamente).

5. `(1.0pt)` Exiga que se cumplan las condiciones de continuidad en todo los puntos de la interfaz para deducir las leyes de Snell: $n_1 \operatorname{sen}(\theta_1) = n_e \operatorname{sen}(\theta_2)$. Identifique n_1 y n_2.

6. `(1.0pt)` Calcule las amplitudes $\vec{E}_2$ y $\vec{E}_1'$ para los casos en que $\vec{E}_1$ es paralelo y perpendicular a $z = 0$.

7. `(0.5pt)` Muestre que existe un ángulo θ_1^B, llamado 'ángulo de Brewster', tal que $\tan\theta_1^B = n_2/n_1$, para el cual la amplitud E_1' se anula en el caso $\vec{E}_1$ paralelo a $z = 0$.

8. `(1.0pt)` Demuestre que una onda plana monocromática, de polarización elíptica arbitraria, se puede descomponer como la suma vectorial de dos ondas polarizadas linealmente. Si hacemos incidir luz natural sobre la interfaz, con $\theta_1 = \theta_1^B$, ¿Cuál será la fracción y el modo de polarización de la onda reflejada?.

II Transmisión electromagnética a través de un conductor

En este problema estudiamos la transmisión de ondas electromagnéticas planas y monocromáticas incidiendo normalmente sobre una placa neutra con conductividad σ (o sea $\vec{j}_l = \sigma \vec{E}$). Aproximamos la placa a un plano infinito de espesor h.

La ecuación de continuidad para la densidad de energía electromagnética es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j}_l \cdot \vec{E}, \tag{1}$$

en que $u = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B}$, y $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

1. `(1.0pt)` Integrando en un volumen finito dé una interpretación física para cada uno de los términos de la ecuación Eq. 1.

2. `(1.0pt)` Muestre, a partir de las ecuaciones de Maxwell, que la ecuación que describe la propagación de ondas es
$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \mu_\circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$$

3. `(2.0pt)` Si la onda incidente tiene frecuencia ω, dé una expresión para la onda transmitida en el interior del conductor.

4. `(2.0pt)` Dé una expresión para flujo de energía electromagnética emergente a través de la placa conductora, y discuta los límites $h \to 0$ y $h \to \infty$.

III Esferas conductoras.

1. `(4.0pt)` Una esfera conductora neutra es sometida a un campo eléctrico uniforme - lejos de la esfera el campo $\vec{E} = E\hat{z}$ es constante.

   a) ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de la esfera?

   b) Dibuje las lineas de campo eléctrico cerca de la esfera.

   c) Calcule la distribución de carga superficial en la esfera (ayuda: use coordenadas esfericas y el principio de superposición para descomponer el campo eléctrico dentro de la esfera y recuerde la relación entre $\vec{E}$ y σ cerca de un plano infinito).

2. `(2.0pt)` Una esfera esta llena de un material conductor salvo por una cavidad, de forma arbitra. La esfera es neutra, pero la cavidad encierra una carga Q. ¿Cuál es el potencial eléctrico afuera de la esfera? Justifique.