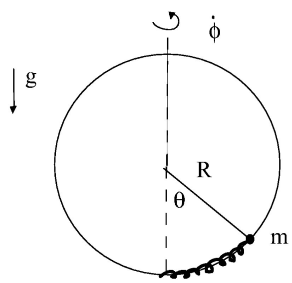
FI3001-1 2013A **Control 1** Prof: Simón Casassus

26 de Abril de 2013 3 h Ayudantes: Angel Rincón, Ignacio Olavarria

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Partícula en un aro.



Una masa puntual m puede deslizar sin roce sobre un anillo de radio R colocado en posición vertical en el campo gravitacional terrestre. El anillo gira con velocidad angular constante sobre un eje vertical que pasa por su centro y la masa m esta unida a un resorte de constante k fijo al otro extremo en el punto mas bajo del anillo. El resorte tiene largo natural $R\theta_\circ$.

1. `( 2 pt)` Escriba el Lagrangeano del sistema.
2. `( 2 pt)` Escriba las cantidades conservadas del sistema.
3. `( 1 pt)` Defina un potencial efectivo para el sistema, tal que $d^2\theta/dt^2 = -dV_{\rm eff}(\theta)/d\theta$.
4. `( 1 pt)` Determine puntos fijos, con θ constante, y estudie su estabilidad.

II Fuerzas de Constricción.

Una argolla de masa m está restringida a moverse en una hélice que en coordenadas cilíndricas está dada por $r = a$ y $dz = bd\theta$, con a y b constantes. La argolla se mueve sin roce sobre esta hélice, y está también sujeta a un potencial $V(r, z) = k(r^2 + z^2)/2$. En $t = 0$ la argolla se lanza con velocidad $\dot{z}|_{t=0} = v_\circ$ desde $z|_{t=0} = 0$. Encuentre la fuerza de constricción que actúa sobre la partícula como función del tiempo utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

III Teoría en Mecánica Analítica.

Una pregunta a elección (hay puntos extra si responde ambas):

1. Enuncie el principio de d'Alembert y deduzca las ecuaciones de Lagrange.

2. Cuerpo rígido.

   a) Demuestre que la velocidad de un punto $\vec{r}_\circ$ de un cuerpo rígido en un sistema inercial $S_\circ$ se puede escribir
   $$\vec{v}_\circ = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r},$$
   en $\vec{V}$ es la velocidad del orígen de un sistema S ligado al cuerpo, $\vec{r}$ es la posición de $\vec{r}_\circ$ en S, $\vec{\Omega}$ es el vector rotación angular.

   b) Demuestre que el momentum angular de un cuerpo rígido en un sistema inercial con orígen en el centro de masa es
   $$L_i = \sum_{\sigma=1}^{N} m_\sigma \left(\vec{r}_\sigma \wedge \vec{v}_\sigma\right)\big|_i = I_{ik}\Omega_k,$$
   donde I es el tensor de inercia.

   c) Escriba el Lagrangeano del cuerpo rígido usando I.

   d) Demuestre que para un vector $\vec{A}$ cualquiera,
   $$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\text{inercial}} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\text{cuerpo}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A},$$
   y escriba las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido libre, en $S_\circ$, pero con cantidades definidas en un sistema ligado al cuerpo y cuyos ejes diagonalizan a I.