FI3001-1 2013A **Examen** Prof: Simon Casassus

5 de Agosto de 2013 3 h Ayudantes: Angel Rincón, Ignacio Olavarria

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Pequeñas oscilaciones: teoría.

Sean $V\left(\{q_i\}_{i=1}^n\right)$ y $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m\dot{x_i}^2$ las energías potencial y cinética que describen un sistema de N partículas con n grados de libertad, coordenadas cartesianas $x_j\left(\{q_i\}_{i=1}^n\right)$, $j = 1, \ldots, 3N$, y coordenadas generalizadas $q_j\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right)$, $j = 1, \ldots, n$. Elijimos un sistema de coordendas generalizadas tal que $\{q_i\}_{i=1}^n = 0$ en equilibrio.

1. `(0.5 pt)` Demuestre que en torno a los puntos de equlibrio T y V son formas cuadráticas,

$$V \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_{jk}q_j q_k \tag{1}$$

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{2}$$

   donde las matrices $\tilde{v}$ y $\tilde{m}$ son constantes y simétricas ($v_{jk} = v_{kj}$, $m_{jk} = m_{kj}$).

2. `(0.5 pt)` Usando las ecuaciones de Lagrange, muestre que las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\sum_{k=1}^{n}\left(v_{lk}q_k + m_{lk}\ddot{q}_k\right) = 0, \qquad \forall\ l = 1, ..., n \tag{3}$$

3. `(0.5 pt)` ¿A qué corresponden los "modos normales" del sistema? ¿Cuantos hay?

4. `(0.5 pt)` Suponga soluciones en modos normales y muestre que la ecuación para las frecuencias características es

$$\det(\tilde{v} - \omega^2\tilde{m}) = 0. \tag{4}$$

5. `(1.0 pt)` Desmuestre que, para dos frecuencias características distintas ω^s y ω^t, los modos normales correspondientes $\rho_k^{s,t}$ satisfacen una relación de ortonormalidad:

$$\sum_{j,k}\rho_j^s m_{jk}\rho_k^t = \delta_{st}. \tag{5}$$

6. `(1.0 pt)` ¿Qué ocurre en el caso degenerado, $\omega^s = \omega^t$? Muestre que en el caso degenerado se pierde información sobre los modos normales, en el sentido que no cumplen automáticamente Ec. 5. ¿Cómo contruiría en el caso degenerado un conjunto de modos normales ortonormales según Ec. 5?

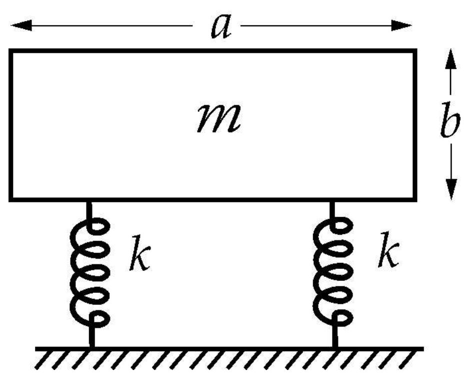
7. `(1.0 pt)` Muestre que existe un sistema de coordenadas generalizadas naturales que desacoplan el problema mecánico. Dé la relación entre estas coordenadas naturales y $\{q_l\}$, y su inverso.

8. `(1.0 pt)` Escriba una expresión general para la solución del problema mecánico, $q_l(t)$. ¿Cómo implementaría las condiciones iniciales sobre $\{q_l, \dot{q}_l\}(t = 0)$ para particularizar la solución general?

II Pequeñas oscilaciones: aplicación, modelo de amortiguadores.

Un bloque uniforme de masa m, largo a y altura b está sostenido por dos resortes, uno en cada extremo. Las constantes elásticas de los resortes son k_1 y k_2, con $k_1 = k_2 = k$. Los resortes se mantienen verticales.

- `(1.5 pt)` Encuentre el momento de inercia del bloque y escriba el Lagrangeano.
- `(1.0 pt)` Encuentre las frecuencias propias del sistema.
- `(1.0 pt)` Encuentre los modos normales de oscilación del sistema.
- `(1.0 pt)` Encuentre un sistema de coordenadas generalizadas que permita desacoplar el Lagrangeano.
- `(1.5 pt)` En $t = 0$ el sistema está en su posición de equilibrio, pero el bloque es impulsado con velocidad $v_\circ$ hacia arriba en el punto de contacto con el resorte izquierdo. Calcule y grafique la trayectoria del sistema.



III Atenuación de una onda entrando en un medio viscoso

Estudiamos la propagación de ondas entrando en un medio dispersivo. Consideramos el caso de una cuerda infinita, oscilando libremente en $x < 0$, pero inmersa en un medio viscoso en $x \geq 0$. La densidad lineal σ y la tensión en la cuerda τ son constantes.

1. `(2.0 pt)` La ecuación que describe el desplazamiento transversal de la cuerda $u(x,t)$ para $x < 0$ es la ecuación de ondas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{en que } c = \sqrt{\tau/\sigma}.$$

   a) Dé una expresión para una onda desplazándose en dirección $+\hat{x}$ con desplazamiento $u(x)$ y velocidad transversal $v(x)$ en $t = 0$.

   b) Escriba la descomposición espectral de $u(x,t)$, es decir su transformada de Fourier en el sistema que se desplaza con la onda.

   c) Justifique que la densidad lineal de energía es $\epsilon = \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ (ayuda: considere el trabajo ejercido por la tensión al estirar un elemento de cuerda).

   d) Calcule el flujo de energía $S = \epsilon c$ para una componente espectral con número de onda k y frecuencia angular ω.

2. `(2.0 pt)` Consideramos ahora la propagación de la onda en el medio viscoso.

   a) El roce ejercido por el medio viscoso sobre un elemento de cuerda de largo dx es $\vec{f} = -\chi\frac{\partial u}{\partial t}dx\hat{y}$, en que χ es constante y $\hat{y} = \vec{u}/|\vec{u}|$. Demuestre que la ecuación de movimiento para $u(x,t)$ en $x > 0$ es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

   b) Demuestre que la relación de dispersión en el medio viscoso es

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \frac{i\chi\omega}{\tau} - k^2 = 0.$$

   c) Demuestre que ω es real, y concluya que $k = k_R + ik_I$ en el plano complejo. Dé unas expresiones para k_R y k_I en función de ω.

   d) Grafique cualitativamente $u(x, t = t_\circ)$ en $x > 0$, dado $u(x = 0, t = t_\circ)$.

   e) ¿Cuál es la velocidad con la cual se puede propagar información en el medio viscoso?

3. `(2.0 pt)` Consideramos el caso de una onda monocromática con amplitud A incidiendo en $x = 0$ desde $x = -\infty$, con flujo de energía S_i. Al entrar en el medio parte de la onda es reflejada, con amplitud B y flujo S_r, mientras que otra parte es transmitida, con amplitud C y flujo S_t.

   a) Imponga continuidad de $u(x,t)$ y de $\partial u/\partial x$ para obtener unas relaciones entre A, B y C.

   b) Calcule los coeficientes de transmisión, $T = \langle S_t\rangle/\langle S_i\rangle$, y de reflección $R = \langle S_r\rangle/\langle S_i\rangle$, en que $\langle\rangle$ denota promedio temporal.

   c) ¿Cuanta potencia es disipada por el medio viscoso en función de ω?