Vibraciones y Ondas
2013

Simon Casassus Astronomía, Universidad de Chile
http:://www.das.uchile.cl/∼simon

Parte III

Ondas

Outline

Plan

1.1-Solución de d'Alembert

- Por sustitución, las soluciones de la ec. de ondas 1D se pueden escribir

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct). \tag{1}$$

- Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ \dot{u}(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

- La solución Ec. 1 se pueden adecuar a cualquier condición inicial f y g con

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x')dx'. \tag{2}$$

- Notar caso $g = 0$: ec. de ondas da dos señales propagándose en sentido opuesto con mitad de amplitud original.

Plan

1.2-Decomposición espectral

- Consideremos una onda $f(x - ct)$ propagándose hacia $+x$.
- En S', con velocidad c respecto a S, hacemos descomposición de Fourier:

$$f(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp(ikx').$$

- Entonces en S tenemos la descomposición espectral

$$f(x,t) = \int dk A(k) \underbrace{\exp(i[kx - \omega t])}_{\text{onda plana monocromática}} .$$

- Longitud de onda $\lambda = 2\pi/\omega$, período $\tau = 2\pi/\omega$.

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Equivalencia entre d'Alembert y Bernouilli para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Fenómenos ondulatorios**
3. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
4. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
5. **Difracción e interferencias**

1.3-d'Alembert para extremos fijos

- Condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x),\ \dot{u}(x,0) = g(x)$, con extremos fijos $u(0,t) = u(l,t) = 0$.
- Cuerda: $0 \leq x \leq l \ \Rightarrow$ necesitamos extender el dominio de f y $g(x \pm ct)$ para todo $\mathbb{R}$ porque $t \to \infty$.
- Requerimos $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$ de manera que $f(0) = g(0) = 0$. Notar ondas viajando en sentido opuesto hacia 0.
- Tbién requerimos f y g impares en torno a $x = l$:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & f(l + (x - l)) = -f(l - (x - l)) \quad & = f(x + 2l) \\
g(x) = \quad & g(l + (x - l)) = -g(l - (x - l)) \quad & = g(x + 2l)
\end{aligned}
$$

- $\Rightarrow$ f y g deben ser impares y periódicas.

Plan

1 Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli

- Solución de d’Alembert
- Decomposición espectral
- d’Alembert para extremos fijos
- **Equivalencia entre d’Alembert y Bernouilli para extremos fijos**
- Ondas 3-D

2 Fenómenos ondulatorios

3 Flujo de energía

- Vector flujo de energía
- Transmisión, reflección

4 Paquetes de ondas

- Medios dispersivos
- Paquetes de ondas

5 Difracción e interferencias

1.4-Equivalencia entre d'Alembert y Bernouilli para extremos fijos

- Bernouilli $\equiv$ modos normales,
  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$, o bien

$$u(x,t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right],$$

  donde, $a_n = C_n \cos(\phi_n),\ b_n = -C_n \sin(\phi_n)$.
- Expandimos d'Alembert para extremos fijos, y usamos $\int_0^l \rho_n(x)\rho_m(x)\sigma dx = \delta_{nm}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\text{con} \quad A_n = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) f(x')\sigma dx' \quad (3)$$

1.4-Equivalencia entre d'Alembert y Bernouilli para extremos fijos

- De la misma manera para g,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\text{con} \quad B_n = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) g(x')\sigma dx' \quad (4)$$

- Vemos que las expansiones de f y g en modos normales (i.e. serie de Fourier) son impares y periódicas con período $2l$.
- Sustituyendo f y g en la solución de d'Alembert, recuperamos

$$u(x,t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{l}\right)\right],$$

con $a_n \equiv A_n$ y $B_n = n\pi c b_n / l$.

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Equivalencia entre d'Alembert y Bernouilli para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Fenómenos ondulatorios**
3. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
4. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
5. **Difracción e interferencias**

1.5-Ondas 3-D

- En 3-D,

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

- d'Alembert: $\psi = \psi(\vec{x}\cdot\hat{c} \pm ct)$ $\Rightarrow$ Onda plana.
- Decomposición espectral:

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3k A(\vec{k}) \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\right].$$

- Ondas esféricas: busquemos soluciones $\psi(\vec{r},t) = f(r,t)$. En coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Solución: $\boxed{f = h(r \pm ct)/r}$.

Outline

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Equivalencia entre d'Alembert y Bernouilli para extremos fijos
Ondas 3-D
Fenómenos ondulatorios
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Difracción e interferencias

2-Fenómenos ondulatorios

- Sonido.
- Ondas de superficie.
- Ondas electromagnéticas.
- Ondas de materia - ondículas.

Outline

Plan

Densidad Hamiltoniana y momentum canónico

- Del ppio de mínima acción lleguamos,

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t1}^{t2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t) = 0,$$

lleguamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange para medios continuos (i.e. la ecuación de ondas),

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0. \qquad (5)$$

- La densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \mathcal{P} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}, \text{con} \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}, \qquad (6)$$

donde $\mathcal{P}$ es el momentum canónico.

Vector flujo de energía

- Usando Eq. 5 calculamos la variación de la densidad de energía ($\equiv$ densidad Hamiltoniana si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$),

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial u}{\partial t}\right],$$

  cuando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, es decir cuando T y V no dependen explícitamente de t.

- En 3-D, lleguaríamos a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0, \tag{7}$$

  donde $S_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x_i}} \frac{\partial u}{\partial t}$ es el vector flujo de energía.

- Integrando en un volumen V, vemos que Eq. 7 constituye una ecuación de continuidad para la energía asociada a una onda.

Ejemplo: cuerda

- Para la cuerda,

$$\mathcal{L} = (\frac{\sigma}{2}) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \text{ y}$$

$$\mathcal{H} = (\frac{\sigma}{2}) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

- De Eqs. 6 y 7 tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \sigma(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ y} \\ \vec{S} &= -\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\hat{x}. \end{aligned}$$

Ejemplo: onda monocromática en una cuerda

- Calculemos el flujo de energía asociado a una onda monocromática, $u(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$:

$$S = A^2(\tau k^2 c)\sin^2(kx - \omega t), \text{ y en promedio temporal,}$$

$$\langle S\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T S dt = \frac{1}{2}A^2(\tau k^2 c) = \frac{1}{2}A^2\sigma c\omega^2.$$

- Además tenemos la densidad de energía

$$\mathcal{H} = A^2\tau k^2\sin^2(kx - \omega t).$$

- Vemos entonces que para una onda monocromática

$$\boxed{S = \mathcal{H}c}.$$

Plan

3.2-Transmisión, reflección

- Cuando una onda $u_i(\vec{x}, t)$ incide en una discontinuidad del medio en el cual se propaga, existe una onda reflejada $u_r(\vec{x}, t)$, y una onda transmitida, $u_t(\vec{x}, t)$.
- El coeficiente de transmisión se define

$$T = \frac{S_t}{S_i},$$

y el coeficiente de reflección es

$$R = \frac{S_r}{S_i}.$$

- Para el ejemplo de una onda en una cuerda incidente en una discontinuidad de $\sigma(x)$ (tarea),

$$R = \left[\frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}}\right]^2 \text{ y } T = \frac{4\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\left[\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}\right]^2}$$

Outline

Plan

Naturaleza discreta (cuántica) de la materia

- Cuando λ es comparable con la distancia a entre las partículas discretas que componen un medio continuo de dimensión $L \gg a$, la aproximación de continuo falla y hay que recurrir a una descripción discreta.
- Por ejemplo para la cuerda con masas, cuando $\lambda \sim a$, en que a es la distancia entre las masas, teníamos

$$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma}\sin^2(\frac{1}{2}ka),$$

  y cuando $\lambda \gg a$ recuperamos $\omega^2 \rightarrow \frac{\tau}{\sigma}k^2$.
- Definimos la velocidad de fase $\boxed{c_f \equiv \omega/k}$. Para una cuerda ideal, en el límite continuo la velocidad de propagación $c_f = c$ es constante, independiente de ω.
- Pero cuando $k \rightarrow \infty$,

$$c_f = \sqrt{\frac{4\tau}{mak^2}\sin^2(\frac{1}{2}ka)},$$

  y vemos que ondas con mayor k se propagan más lento.

Roce

- Consideremos una cuerda en un medio viscoso, de manera que exista una fuerza de roce opuesta al desplazamiento transversal.
- A 1er orden en la fuerza de roce, incluimos la fuerza de roce aplicada a un elto de cuerda dx:

$$f_r = -dx\chi\frac{\partial u}{\partial t}.$$

- Un balance de fuerzas sobre un elemento dx da una ecuación de ondas modificada,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ con } c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}.$$

Roce

- Consideremos la propagación de una onda monocromática en un medio con roce. Ponemos $u(x,t) = A \exp\left[i(kx - \omega t)\right]$, y vemos que la relación de dispersión

$$\frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\chi\omega}{\tau} - k^2 = 0 \text{ es compleja.}$$

- $\Rightarrow \;\; k \in \mathbb{C}, \;\; k = k_R + ik_I$.
- De la relación de dispersión,

$$k^I_\pm = -\chi\omega/(2\tau k^R_\pm),$$

$$k^R_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \left(\frac{\chi\omega}{c}\right)^2}\right).$$

- Entonces las soluciones de la ecuación de ondas disipativa tienen la forma

$$u = Ae^{-k^I x} e^{i(k^R x - \omega t)}.$$

- Si el medio disipativo esta confinado en $x > 0$, es necesario que $k^I > 0$ para evitar divergencia.

Plan

4.2-Paquetes de ondas

- La decomposición espectral de una señal es

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp[i(kx-\omega t)]dk,$$

en que $A(k)$ es el 'espectro' de u , y tbien es la transformada de Fourier en $t=0$.

- Queremos estudiar la propagación de la onda en un medio dispersivo, para $t>0$.
- Si partimos con un espectro $A(k)$ muy angosto en torno a $k_\circ$,

$$\omega(k) = \omega_\circ + (k-k_\circ)\left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_\circ}.$$

- Introduciendo $l \equiv k - k_\circ$,

$$u(x,t) = \exp[i(k_\circ x - \omega_\circ t)]\overbrace{\int dl A(l+k_\circ)\exp[il(x-v_g t)]}^{\text{envoltura se propaga con velocidad } v_g},$$

con $\boxed{v_g \equiv \partial\omega/\partial k|_{k_\circ}}$.

4.2-Paquetes de ondas

- Entonces vemos que, modulo un factor harmónico (exponencial oscilante),

$$u(x,t) \sim f(x - v_g t),$$

y la señal se propaga con velocidad v_g. Notamos que las ondas monocromáticas, i.e. una sola componente espectral, no pueden transmitir información porque tienen dominio infinito.

- Para el caso de un espectro Gaussiano en $t = 0$,

$$A(k) = \exp(-\alpha^2 (k - k_\circ)^2),$$

$$\Rightarrow \ (\text{tarea})\ u(x, t = 0) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{ik_\circ x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}},$$

y $\boxed{\sigma(u)\sigma(A) = 1}$, donde σ es la dispersión cuadrática media.

Outline