

# Vibraciones y Ondas

2013

Simon Casassus Astronomía, Universidad de Chile

<http://www.das.uchile.cl/~simon>

- I Mecánica de Lagrange
- II Pequeñas oscilaciones
- III Ondas

# Parte II

## Pequeñas Oscilaciones

- 1 Solución general
- 2 Coordenadas Normales
- 3 Muchos grados de libertad
- 4 Límite continuo

### Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

### Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

### Muchos grados de libertad

- Problemas de  $N$  cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

### Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Mínima acción en medios continuos
- Hamiltoniano

# Outline

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

### Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

### Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

### Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

### Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

## 1.1-Formulación

- Vamos a considerar perturbaciones en torno al equilibrio de un sistema conservativo, con constricciones independientes de  $t$ .
- Energía cinética en coord. gen.:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\lambda, \text{ con } \sigma, \lambda = 1, \dots, n,$$

donde  $m_{\sigma\lambda} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda}$ .

- Perturbaciones:  $q_\sigma = \bar{q}_\sigma + \eta_\sigma$ .
- En equilibrio,  $Q_\sigma \equiv \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = 0$ , y

$$V \approx V_0 + \sum_{\sigma, \lambda} \frac{1}{2} \overbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda}}^{v_{\sigma\lambda}} \Big|_{\{\bar{q}_\sigma\}} \eta_\sigma \eta_\lambda.$$

- El Lagrangeano es

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{\eta}_\sigma \dot{\eta}_\lambda - v_{\sigma\lambda} \eta_\sigma \eta_\lambda \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda} \ddot{\eta}_\lambda + v_{\sigma\lambda} \eta_\lambda = 0. \quad (2)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas

Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de

libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

# Un grado de libertad

- $m_{\sigma\lambda} \equiv m, v_{\sigma\lambda} \equiv k.$
- Solución de Eq. 2 es  $\eta = \text{Re}(z),$

$$z(t) = z_+ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_- e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \text{ si } k > 0,$$

$$z(t) = z_+ e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_- e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \text{ si } k < 0,$$

- 

$$\Rightarrow \eta = \rho \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi \right).$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

## $n$ grados de libertad

- Pasando a  $\mathbb{C}$ , Eq. 2 se escribe

$$\sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda} \ddot{z}_{\lambda} + v_{\sigma\lambda} z_{\lambda} = 0, \text{ con } \eta_{\sigma} = \Re(z_{\sigma}). \quad (3)$$

- Buscamos soluciones de Eq. 3 en modos normales, en que todas las coordenadas oscilan con la misma frecuencia:

$$z_{\sigma} = z_{\sigma}^s \exp(i\omega t).$$

- Sustitución en Eq. 3 da

$$\sum_{\lambda=1}^n \underbrace{(v_{\sigma\lambda} - \omega^2 m_{\sigma\lambda})}_{a_{\sigma\lambda}} z_{\lambda}^s = 0 \quad (4)$$

- Eq. 4 tiene soluciones no triviales solo si  $\det(a_{\sigma\lambda}) = 0$ ,

$$|v_{\sigma\lambda} - \omega^2 m_{\sigma\lambda}| = 0 \Rightarrow n \text{ raíces complejas } \omega_s^2, s = 1, \dots, n.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano



## $n$ grados de libertad

- Props: los  $\omega_s^2$  son reales positivos (ver demo en clase).
- Como  $\det(a_{\sigma\lambda}) = 0$ , una de las  $n$  ecuaciones en Eq. 4 es combinación lineal de las otras. Eliminando la  $n$ -ésima, la Ley de Cramer nos da  $z_\sigma$ :

$$\begin{aligned} a_{1,1} \frac{z_1}{z_n} + \cdots + a_{1,(n-1)} \frac{z_{n-1}}{z_n} &= -a_{1,n} \\ &\vdots \\ a_{(n-1),1} \frac{z_1}{z_n} + \cdots + a_{(n-1),(n-1)} \frac{z_{n-1}}{z_n} &= -a_{(n-1),n} \end{aligned} \quad (5)$$

- Vemos que  $z_\sigma^s/z_n$  es real porque todos los coefs  $a_{\sigma\lambda}$  son reales.

$$\Rightarrow z_\sigma^s = e^{i\phi_s} \rho_\sigma^s, \text{ con } (\phi_s, \rho_\sigma^s) \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Modos ortonormales

- Sustitución de Eq. 6 en Eq. 3 y combinando dos frecuencias normales  $s$  y  $t$  llegamos a

$$\sum_{\lambda\sigma} \rho_{\sigma}^t m_{\sigma\lambda} \rho_{\lambda}^s = \delta_{st} \quad (7)$$

- El modo normal correspondiente a la frecuencia normal (o 'autovalor') es

$$z_{\sigma}^s = C^s e^{i\phi_s} \rho_{\sigma}^s,$$

en que  $C^s$  y  $\phi^s$  son las únicas constantes reales por especificar.

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

## 1.3-Solución general

- $z_\sigma(t) = \sum_{s=1}^n (z_+^s)_\sigma e^{i\omega_s t} + (z_-^s)_\sigma e^{-i\omega_s t}$ ,  $\sigma = 1, \dots, n$ .
- Tomando parte real,  $\eta_\sigma = \frac{1}{2}(z_\sigma^s + z_\sigma^{s*})$ , y definiendo  $(z_+^s)_\sigma + (z_+^s)_\sigma^* = C^s \rho_\sigma^s e^{i\phi_s}$ , llegamos a

$$\eta_\sigma = \sum_{i=1}^n \rho_\sigma^s C^s \cos(\omega_s t + \phi_s).$$

- para determinar las constantes  $\phi_s$  y  $C^s$  se usan las condiciones iniciales,  $\eta_\sigma(0)$  y  $\dot{\eta}_\sigma(0)$ , y usando Eq. 7,

$$\sum_{\sigma, \lambda} \rho_\lambda^t m_{\lambda, \sigma} \eta_\sigma(0) = C^t \cos(\phi_t)$$

$$\sum_{\sigma, \lambda} \rho_\lambda^t m_{\lambda, \sigma} \dot{\eta}_\sigma(0) = -\omega_t C^t \sin(\phi_t)$$

$\Rightarrow$  despejamos  $C^t$  y  $\tan(\phi_t)$ .

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Outline

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda
  - Coordenadas normales
  - Mínima acción en medios continuos
  - Hamiltoniano

## Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

## Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

- Problemas de  $N$  cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

## Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Mínima acción en medios continuos
- Hamiltoniano

# Plan

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda
  - Coordenadas normales
  - Mínima acción en medios continuos
  - Hamiltoniano

## Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

## Coordenadas Normales

### Matriz modal

- Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

- Problemas de  $N$  cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

## Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Mínima acción en medios continuos
- Hamiltoniano

## 2.1-Matriz modal

- Definimos la matriz modal  $\mathcal{A}_{\lambda\sigma} = \rho_{\lambda}^{\sigma}$ , es una matriz cuadrada independiente de las condiciones iniciales.
- prop.: la matriz modal diagonaliza la matriz masa  $m_{\lambda\sigma}$ :

$$\mathcal{A}^T m \mathcal{A} = \mathbb{I}.$$

- prop.: la matriz modal diagonaliza la matriz potencial  $v_{\lambda\sigma}$ :

$$\mathcal{A}^T v \mathcal{A} = \mathbb{I}.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas

Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Minimia acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda
  - Coordenadas normales
  - Mínima acción en medios continuos
  - Hamiltoniano

## Solución general

Formulación  
Modos normales  
Solución general

## Coordenadas Normales

Matriz modal

## Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos  
Frecuencias normales  
Modos normales

## Límite continuo

Paso al continuo  
Solución en modos normales  
Lagrangeano para la cuerda  
Coordenadas normales  
Mínima acción en medios continuos  
Hamiltoniano



## 2.2-Coordenadas normales

- Definimos un nuevo set de coordenadas generalizadas,  $\zeta_\sigma$ , con

$$\eta(t) = \mathcal{A}\zeta(t), \text{ o bien, } \mathcal{A}^T m \eta(t) = \zeta(t).$$

- El Lagrangeano Eq. 1 se escribe

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{\eta}_\lambda \dot{\eta}_\sigma - v_{\sigma\lambda} \eta_\sigma \eta_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} (\dot{\zeta}_\sigma)^2 - \omega_\sigma^2 \zeta_\sigma^2$$

- Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\ddot{\zeta}_\sigma = -\omega_\sigma^2 \zeta_\sigma, \quad \sigma = 1, \dots, n.$$

- Vemos que las coordenadas normales desacoplan el problema de pequeñas oscilaciones. Las soluciones son,

$$\zeta_\sigma = C^\sigma \cos(\omega_\sigma t + \phi_\sigma), \text{ y usando la definición de } \zeta_\sigma,$$

$$\eta_\lambda = \sum_{\sigma} \rho_\lambda^\sigma C^\sigma \cos(\omega_\sigma t + \phi_\sigma).$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Ejemplos

- Dos péndulos acoplados
- Ortogonalización de Graham-Schmidt (Fetter 4.10)

## Solución general

Formulación  
Modos normales  
Solución general

## Coordenadas Normales

Matriz modal

## Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos  
Frecuencias normales  
Modos normales

## Límite continuo

Paso al continuo  
Solución en modos normales  
Lagrangeano para la cuerda  
Coordenadas normales  
Mínima acción en medios continuos  
Hamiltoniano

# Outline

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

### Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

### Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

### Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

### Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

### Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

### Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

### Muchos grados de libertad

#### Problemas de $N$ cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

### Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

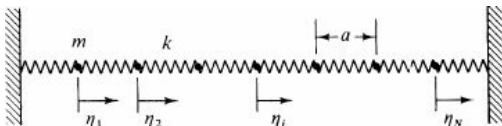
Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

## 3.1-Problemas de $N$ cuerpos

- Modelo de red cristalina 1 –  $D$ .



$$L = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k \sum_{i=0}^N (\eta_{i+1} - \eta_i)^2, \text{ con } \eta_0 = \eta_{N+1} = 0,$$

$$m\ddot{\eta}_i + 2k\eta_i - k(\eta_{i+1} + \eta_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangiano para la  
cuerda

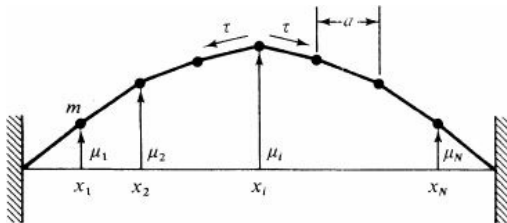
Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

## 3.1-Problemas de $N$ cuerpos

- Oscilaciones transversas de  $N$  masas en una cuerda sin masa.



Mécanica vectorial da ec. de mov.:

$$m\ddot{\mu}_i + \frac{2\tau}{a}\mu_i - \frac{\tau}{a}(\mu_{i+1} + \mu_{i-1}) = 0 \text{ con } \mu_0 = \mu_{N+1} = 0. \quad (8)$$

Similitud con model de red 1 -  $D$  sugiere  $k \leftrightarrow \tau/a$  y

$$L = \frac{1}{2}m \sum_i (\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{i=0}^N (\mu_{i+1} - \mu_i)^2. \quad (9)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

### Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

### Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

### Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

### Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

## 3.2-Frecuencias normales

- Modos normales  $\mu_i = C\rho_i \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow$

$$\text{Ec. de mov. } \left(\frac{2\tau}{a} - m\omega^2\right)\rho_i - \frac{\tau}{a}(\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{con } \rho_0 = \rho_{N+1} = 0.$$

- Introduciendo  $\lambda \equiv 2 - \frac{m\omega^2 a}{\tau}$ ,

$$\lambda\rho_i - (\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano



## 3.2-Frecuencias normales

- El conjunto de ecuaciones lineales  $\lambda\rho_i - (\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0$  tiene soluciones no triviales solo si su determinante  $D_N = 0$ .  $\Rightarrow$ (ver cátedra)

$$D_N = \lambda D_{N-1} - D_{N-2}.$$

- Buscamos soluciones en  $D_N = Ae^{iBN}$ ,

$$\longrightarrow D_N = A_+ e^{iN\psi} + A_- e^{-iN\psi}, \text{ con } \lambda \equiv 2 \cos(\psi).$$

Los  $A_{\pm}$  estan dados por  $D_1$  y  $D_2$ :

$$D_N = \frac{\sin((N+1)\psi)}{\sin(\psi)} = 0, \Rightarrow (N+1)\psi = n\pi, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

- Usando  $\lambda = 2 - m\omega^2 a/\tau = 2 \cos(\psi)$ ,

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ma} (1 - \cos(\psi)) = \frac{4\tau}{ma} \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right).$$

- De Ec. 10,

$$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma} \sin^2\left(\frac{1}{2} \frac{n\pi}{N+1}\right), n = 1, \dots, N.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda
  - Coordenadas normales
  - Mínima acción en medios continuos
  - Hamiltoniano

## Solución general

Formulación  
Modos normales  
Solución general

## Coordenadas Normales

Matriz modal  
Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos  
Frecuencias normales

## Modos normales

## Límite continuo

Paso al continuo  
Solución en modos normales  
Lagrangeano para la cuerda  
Coordenadas normales  
Mínima acción en medios continuos  
Hamiltoniano

### 3.3-Modos normales

- Sustitución de las frecuencias normales en la Ec. de mov. Ec. 8 da

$$2 \cos \left( \frac{n\pi}{N+1} \right) \rho_i^n = \rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n.$$

- Las soluciones están dadas por el mismo método que para las raíces de  $D_N = 0$ , pero es interesante un método alternativo: Introducimos  $\mu(x_j) = \mu_j$ , con  $x_j = ja$ , y buscamos soluciones de la forma

$$\mu(x_j, t) = \Re(A \exp(i[kx_j - \omega t])), \quad (11)$$

o bien con  $-k$ .

- Sustitución de Ec. 11 en Ec. 8 da

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ma} (1 - \cos(ka)) = \frac{4\tau}{ma} \sin^2 \left( \frac{ka}{2} \right).$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

## 3.3-Modos normales

Usamos dos tipos de condiciones de borde:

- Condiciones de borde periódicas

$$\mu(x_j) = \mu(x_{N+j}) = \mu(x_j + Na),$$

y usando Ec. 11,  $e^{ikNa} = 1 \Leftrightarrow k = 2n\pi/Na$ , con

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{1}{2}(N-1) \text{ para } N \text{ impar,}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{1}{2}(N-1), \frac{N}{2} \text{ para } N \text{ par,}$$

En que usamos la condición de que deben haber exactamente  $N$  modos normales.

[Solución general](#)

[Formulación](#)

[Modos normales](#)

[Solución general](#)

[Coordenadas](#)

[Normales](#)

[Matriz modal](#)

[Coordenadas normales](#)

[Muchos grados de](#)

[libertad](#)

[Problemas de  \$N\$  cuerpos](#)

[Frecuencias normales](#)

[Modos normales](#)

[Límite continuo](#)

[Paso al continuo](#)

[Solución en modos normales](#)

[Lagrangiano para la cuerda](#)

[Coordenadas normales](#)

[Mínima acción en medios continuos](#)

[Hamiltoniano](#)

### 3.3-Modos normales

- Condiciones de borde con extremos fijos.
  - La solución general del tipo Ec. 11 es

$$\mu(x_j, t) = \Re(A_+ e^{i[kx_j - \omega t]} + A_- e^{i[-kx_j - \omega t]}),$$

y las condición  $\mu(0) = 0$  da  $A_+ = -A_-$ .

- Con  $\mu(x_{N+1}) = \mu((N+1)a) = 0$  tenemos

$$\sin(k(N+1)a) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a(N+1)}, \quad n = 1, \dots, N.$$

- Vemos que la expresión para  $k(n)$  es equivalente al aplicar la 'relación de dispersión' Ec. 27 a las  $\omega(n)$  dadas por el método  $D_N = 0$ .
- Con este método alternativo tenemos la expresión para los modos normales:

$$\mu(x_j, t) = 2iA_n \sin\left(\frac{n\pi x_j}{a(N+1)}\right) \exp(i\omega t),$$

vemos que  $\mu(x_j, t) \propto \rho_j^n$  pero sin normalizar, ver aux..

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

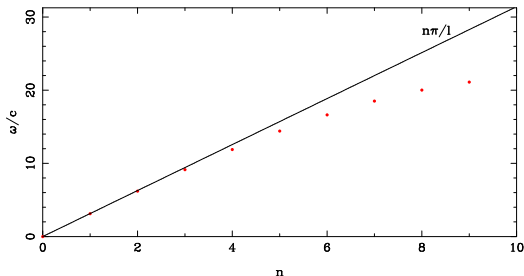
Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

### 3.3-Modos normales

En resumen, graficamos

$$\omega_n/c = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi a}{l2}\right), \text{ con } l \equiv (N+1)a, \text{ donde } c \equiv \sqrt{\tau/(m/a)}.$$



Notar la existencia de una frecuencia normal máxima para sistemas discretos. Cuando  $N \gg 1$ ,  $(\omega_n/c)_{\max} \approx 2/a$ , con una longitud de onda mínima  $\lambda = 2a(N+1)/n > 2a$ .

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Outline

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda
  - Coordenadas normales
  - Mínima acción en medios continuos
  - Hamiltoniano

## Solución general

Formulación  
Modos normales  
Solución general

## Coordenadas Normales

Matriz modal  
Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos  
Frecuencias normales  
Modos normales

## Límite continuo

Paso al continuo  
Solución en modos normales  
Lagrangeano para la cuerda  
Coordenadas normales  
Mínima acción en medios continuos  
Hamiltoniano

# Plan

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda
  - Coordenadas normales
  - Mínima acción en medios continuos
  - Hamiltoniano

## Solución general

Formulación  
Modos normales  
Solución general

## Coordenadas Normales

Matriz modal  
Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos  
Frecuencias normales  
Modos normales

## Límite continuo

### Paso al continuo

Solución en modos normales  
Lagrangeano para la cuerda  
Coordenadas normales  
Mínima acción en medios continuos  
Hamiltoniano



## 4.1-Paso al continuo

- Tomamos el ejemplo de las oscilaciones transversas de una cuerda con masas, y llevamos  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ , con  $\sigma = m/a$  constante.

- $\Rightarrow$

$$\omega_n^2 \rightarrow c \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Soluciones en modos normales ( $\sim$  ondas planas)  
 $\mu(x, t) = A \exp(i[kx - \omega t])$ , con  
 $k = (2\pi n)/l, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ .

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

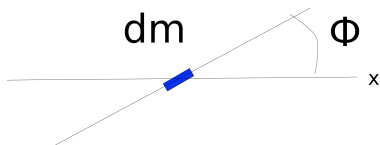
Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

## Tratamiento directo



- Ec. de mov. de la cuerda.  $\sin(\phi) \sim \phi \sim \tan \phi = \partial u / \partial x$ .

$$\text{Newton: } \sigma dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau(x + dx) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - \tau(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

- Tarea: verificar que se obtiene la misma ecuación desde Ec. 8 pasando al continuo.
- Si  $\sigma$  y  $\tau$  son constantes llegamos a Ec. de ondas 1-D:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas

Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de

libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangiano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

# Plan

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

### Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

### Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

### Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

### Límite continuo

Paso al continuo

### Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

## 4.2-Solución en modos normales

- Ponemos  $u(x, t) = C\rho(x) \cos(\omega t + \phi)$ .
- Sustitución en Ec. de ondas, Ec. 12, da:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + k^2\rho = 0, \text{ con, } k = \omega/c \Rightarrow \rho(x) = A \sin(kx + \theta).$$

- Extremos fijos,  $\rho(0) = \rho(l) = 0 \rightarrow \rho(x) \propto \sin(kx)$ , con  $k = n\pi/l$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Para satisfacer condiciones de bordes, **el largo de la cuerda debe ser un múltiplo de la longitud de onda media**, i.e.  $\lambda = 2l/n$ .
- Vemos que el desplazamiento transversal en el caso continuo es el mismo que en el caso discreto.
- Por analogía con caso discreto, la solución general de la ec. de ondas se construye por superposición de los modos normales,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (13)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

## 4.2-Solución en modos normales

- O bien, en notación de Fourier, Ec. 13 se escribe

$$u(x, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin(k_n x) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)], \quad (14)$$

donde,  $a_n = C_n \cos(\phi_n)$ ,  $b_n = -C_n \sin(\phi_n)$ .

- $a_n$  y  $b_n$  se despejan de las condiciones iniciales  $u(x, t = 0)$  y  $\dot{u}(x, t = 0)$ , usando la ortonormalidad de los modos.
- En el caso continuo, la relación de ortonormalidad, Ec. 7, se escribe

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0} \sum_{\mu=1}^N a \rho^t(x_\mu) \frac{m}{a} \rho^s(x_\mu) &= \delta_{st}, \\ \Rightarrow \int_0^l dx \rho^t(x) \sigma \rho^s(x) &= \delta_{st}. \end{aligned} \quad (15)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangiano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

## 4.2-Solución en modos normales

- Tarea: confirmar Ec. 15 para modos normales continuos 1D.
- Con la ortonormalidad, podemos despejar los  $a_n$  y  $b_n$  de Ec. 14 usando las condiciones iniciales:

$$a_n = \int_0^l \rho^n(x) u(x, 0) \sigma dx = \sqrt{2} l \sigma \int_0^k \sin(k_n x) u(x, 0) \sigma dx,$$

$$\omega_n b_n = \int_0^l \rho^n(x) \dot{u}(x, 0) \sigma dx = \sqrt{\frac{2}{l \sigma}} \int_0^l \sin(k_n x) \dot{u}(x, 0) \sigma dx.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangiano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

# Plan

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda**
  - Coordenadas normales
  - Mínima acción en medios continuos
  - Hamiltoniano

## Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

## Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

- Problemas de  $N$  cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

## Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales

## Lagrangeano para la cuerda

- Coordenadas normales
- Mínima acción en medios continuos
- Hamiltoniano

# Lagrangeano por límite continuo

- De Ec. 9,

$$L = \frac{1}{2} \frac{m}{a} \sum_i a (\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{i=0}^N a \left( \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{a} \right)^2.$$

- Pasando al límite continuo,  $a \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $\mu_i(t) = u(x_i, t)$ ,

$$L = \frac{\sigma}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{\tau}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas

Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de

libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano



## Lagrangiano por tratamiento directo

- La energía cinética de un elto de masa  $dm$  es

$$\frac{1}{2}dm \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2,$$

- Para la cuerda entera,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l dx \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

- La energía potencial esta dada por el trabajo que ejercen las fuerzas de tension **internas a  $dm$ , que tienden a devolverlo a su largo en reposo  $dx$ :**

$$\begin{aligned} dW &= -\tau(ds - dx) = -\tau dx \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} - 1 \right] \\ &\approx \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 dx = -dU. \quad \rightarrow \quad V = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangiano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

# Plan

## 1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

## 2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

## 3 Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

## 4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

### Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

### Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

### Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

### Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

### Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

## 4.4-Coordenadas normales

- Solución general cuerda con extremos fijos:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) C_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (16)$$

$$\text{con } \rho_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \text{ y } \int_0^l dx \rho_n(x) \sigma \rho_m(x) = \delta_{mn}$$

- Del parecido con  $\mu_i(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i^n \zeta_n$ , definimos

$$\zeta_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) \zeta_n(t).$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas  
Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de  
libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangiano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano

## 4.4-Coordenadas normales

- Integrando por partes  $V = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$ , y usando ec. de ondas en Eq. 16 para  $\partial^2 u_n(x)/\partial x^2$ :

$$V(x) = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) C_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \right] \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \rho_m(x) C_m k_m^2 \cos(\omega_m t + \phi_m) \right], \quad (17)$$

y usando la ortonormalidad de los modos,

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \zeta_m^2.$$

- Para la energía cinética,  $T = \frac{1}{2} \int dx \sigma (\partial u / \partial t)^2$ , tenemos

$$T = \frac{1}{2} \sum_m (\dot{\zeta}_m)^2.$$

- Desacoplamos el Lagrangeano:

$$L = \sum_{m=1}^{\infty} (\dot{\zeta}_m^2 - \omega_m^2 \zeta_m^2), \text{ con ec. de mov } \ddot{\zeta}_n = -\omega_n^2 \zeta_n.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda
  - Coordenadas normales
  - Mínimia acción en medios continuos**
  - Hamiltoniano

## Solución general

Formulación  
Modos normales  
Solución general

## Coordenadas Normales

Matriz modal  
Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos  
Frecuencias normales  
Modos normales

## Límite continuo

Paso al continuo  
Solución en modos normales  
Lagrangeano para la cuerda  
Coordenadas normales  
**Mínimia acción en medios continuos**  
Hamiltoniano

## 4.5-Mínimia acción en medios continuos

- Introducimos la densidad Lagrangeana  $\mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t)$  :

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t) = 0.$$

- Considerando una variación  $\delta u$  con  $\delta u(x=0, t) = \delta u(x=l, t) = \delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$ , i.e. con condiciones de bordes fijas, llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

- Con  $L = \int_0^l dx \underbrace{\left( \frac{\sigma}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)}_{\mathcal{L}}$ , recuperamos ec.

de ondas 1D.

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas

Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de

libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Mínimia acción en medios continuos

Hamiltoniano

# Plan

- 1 Solución general**
  - Formulación
  - Modos normales
  - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
  - Matriz modal
  - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
  - Problemas de  $N$  cuerpos
  - Frecuencias normales
  - Modos normales
- 4 Límite continuo**
  - Paso al continuo
  - Solución en modos normales
  - Lagrangeano para la cuerda
  - Coordenadas normales
  - Mínima acción en medios continuos
  - Hamiltoniano

## Solución general

Formulación  
Modos normales  
Solución general

## Coordenadas Normales

Matriz modal  
Coordenadas normales

## Muchos grados de libertad

Problemas de  $N$  cuerpos  
Frecuencias normales  
Modos normales

## Límite continuo

Paso al continuo  
Solución en modos normales  
Lagrangeano para la cuerda  
Coordenadas normales  
Mínima acción en medios continuos  
Hamiltoniano

## 4.6-Hamiltoniano

- $H = T + V$  ya que  $\mathcal{L}$  no depende de  $t$ , ni tampoco la relación entre  $(x, y)$  y las coord. gen.  $u_i$ .
- $\Rightarrow H = T + V = \frac{1}{2}\sigma \int_0^l dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\tau \int_0^l dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$
- $\Rightarrow H = E = \frac{1}{2} \sum_n (\dot{\zeta}_n)^2 + \omega_n^2 (\zeta_n)^2$ , y usando  $\zeta_n = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$ ,

$$H = E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 C_n^2.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas

Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de

libertad

Problemas de  $N$  cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos  
normales

Lagrangeano para la  
cuerda

Coordenadas normales

Mínima acción en medios  
continuos

Hamiltoniano