

Parte III

Ondas

Índice

III	1
1. Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli	1
1.1. Solución de d’Alembert	1
1.2. Decomposición espectral	2
1.3. d’Alembert para extremos fijos	2
1.4. Equivalencia entre d’Alembert y Bernouilli para extremos fijos	3
1.5. Ondas 3-D	4
2. Fenómenos ondulatorios	4
3. Flujo de energía	4
3.1. Vector flujo de energía	4
3.2. Transmisión, reflexión	6
4. Paquetes de ondas	6
4.1. Medios dispersivos	6
4.2. Paquetes de ondas	7
5. Difracción e interferencias	8

1. Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli

1.1. Solución de d’Alembert

- Por sustitución, las soluciones de la ec. de ondas 1D se pueden escribir

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct). \tag{1}$$

- Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \dot{u}(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

- La solución Ec. 1 se pueden adecuar a cualquier condición inicial f y g con

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x') dx'. \quad (2)$$

- Notar caso $g = 0$: ec. de ondas da dos señales propagándose en sentido opuesto con mitad de amplitud original.

.3

1.2. Decomposición espectral

- Consideremos una onda $f(x - ct)$ propagándose hacia $+x$.
- En S' , con velocidad c respecto a S , hacemos descomposición de Fourier:

$$f(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp(ikx').$$

- Entonces en S tenemos la descomposición espectral

$$f(x, t) = \int dk A(k) \underbrace{\exp(i[kx - \omega t])}_{\text{onda plana monocromática}}.$$

- Longitud de onda $\lambda = 2\pi/\omega$, período $\tau = 2\pi/\omega$.

.4

1.3. d'Alembert para extremos fijos

- Condiciones iniciales: $u(x, 0) = f(x)$, $\dot{u}(x, 0) = g(x)$, con extremos fijos $u(0, t) = u(l, t) = 0$.
- Cuerda: $0 \leq x \leq l \Rightarrow$ necesitamos extender el dominio de f y $g(x \pm ct)$ para todo \mathbb{R} porque $t \rightarrow \infty$.
- Requerimos $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$ de manera que $f(0) = g(0) = 0$. Notar ondas viajando en sentido opuesto hacia 0.
- También requerimos f y g impares en torno a $x = l$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(l + (x - l)) = -f(l - (x - l)) = f(x + 2l) \\ g(x) &= g(l + (x - l)) = -g(l - (x - l)) = g(x + 2l) \end{aligned}$$

- $\Rightarrow f$ y g deben ser impares y periódicas.

.5

1.4. Equivalencia entre d'Alembert y Bernoulli para extremos fijos

- Bernoulli \equiv modos normales, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$, o bien

$$u(x, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right],$$

donde, $a_n = C_n \cos(\phi_n)$, $b_n = -C_n \sin(\phi_n)$.

- Expandimos d'Alembert para extremos fijos, y usamos $\int_0^l \rho_n(x) \rho_m(x) \sigma dx = \delta_{nm}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\text{con } A_n = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) f(x') \sigma dx' \quad (3)$$

.6

- De la misma manera para g ,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\text{con } B_n = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) g(x') \sigma dx' \quad (4)$$

- Vemos que las expansiones de f y g en modos normales (i.e. serie de Fourier) son impares y periódicas con período $2l$.
- Sustituyendo f y g en la solución de d'Alembert, recuperamos

$$u(x, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right],$$

con $a_n \equiv A_n$ y $B_n = n\pi c b_n / l$.

.7

1.5. Ondas 3-D

- En 3-D,

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

- d'Alembert: $\psi = \psi(\vec{x} \cdot \hat{c} \pm ct) \Rightarrow$ Onda plana.
- Decomposición espectral:

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3k A(\vec{k}) \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)].$$

- Ondas esféricas: busquemos soluciones $\psi(\vec{r}, t) = f(r, t)$. En coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Solución: $f = h(r \pm ct)/r$.

.8

2. Fenómenos ondulatorios

- Sonido.
- Ondas de superficie.
- Ondas electromagnéticas.
- Ondas de materia - ondículas.

.9

3. Flujo de energía

3.1. Vector flujo de energía

Densidad Hamiltoniana y momentum canónico

- Del ppio de mínima acción llegamos,

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t) = 0,$$

llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange para medios continuos (i.e. la ecuación de ondas),

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0. \quad (5)$$

- La densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \mathcal{P} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}, \text{ con } \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}, \quad (6)$$

donde \mathcal{P} es el momentum canónico.

.10

Vector flujo de energía

- Usando Eq. 5 calculamos la variación de la densidad de energía (\equiv densidad Hamiltoniana si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$),

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial u}{\partial t} \right],$$

cuando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, es decir cuando T y V no dependen explícitamente de t .

- En 3-D, llegaríamos a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0, \quad (7)$$

donde $S_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x_i}} \frac{\partial u}{\partial t}$ es el vector flujo de energía.

- Integrando en un volumen V , vemos que Eq. 7 constituye una ecuación de continuidad para la energía asociada a una onda.

.11

Ejemplo: cuerda

- Para la cuerda,

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\sigma}{2}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \text{ y}$$

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\sigma}{2}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

- De Eqs. 6 y 7 tenemos

$$\mathcal{P} = \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ y}$$

$$\vec{S} = -\tau(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \hat{x}.$$

.12

Ejemplo: onda monocromática en una cuerda

- Calculemos el flujo de energía asociado a una onda monocromática, $u(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$:

$S = A^2(\tau k^2 c) \sin^2(kx - \omega t)$, y en promedio temporal,

$$\langle S \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} A^2(\tau k^2 c) = \frac{1}{2} A^2 \sigma c \omega^2.$$

- Además tenemos la densidad de energía

$$\mathcal{H} = A^2 \tau k^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

- Vemos entonces que para una onda monocromática

$$\boxed{S = \mathcal{H}c}.$$

.13

3.2. Transmisión, reflexión

- Cuando una onda $u_i(\vec{x}, t)$ incide en una discontinuidad del medio en el cual se propaga, existe una onda reflejada $u_r(\vec{x}, t)$, y una onda transmitida, $u_t(\vec{x}, t)$.
- El coeficiente de transmisión se define

$$T = \frac{S_t}{S_i},$$

y el coeficiente de reflexión es

$$R = \frac{S_r}{S_i}.$$

- Para el ejemplo de una onda en una cuerda incidente en una discontinuidad de $\sigma(x)$ (tarea),

$$R = \left[\frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \right]^2 \quad \text{y} \quad T = \frac{4\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{[\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}]^2}$$

.14

4. Paquetes de ondas

4.1. Medios dispersivos

Naturaleza discreta (cuántica) de la materia

- Cuando λ es comparable con la distancia a entre las partículas discretas que componen un medio continuo de dimensión $L \gg a$, la aproximación de continuo falla y hay que recurrir a una descripción discreta.
- Por ejemplo para la cuerda con masas, cuando $\lambda \sim a$, en que a es la distancia entre las masas, teníamos

$$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma} \sin^2\left(\frac{1}{2}ka\right),$$

y cuando $\lambda \gg a$ recuperamos $\omega^2 \rightarrow \frac{\tau}{\sigma}k^2$.

- Definimos la velocidad de fase $c_f \equiv \omega/k$. Para una cuerda ideal, en el límite continuo la velocidad de propagación $c_f = c$ es constante, independiente de ω .
- Pero cuando $k \rightarrow \infty$,

$$c_f = \sqrt{\frac{4\tau}{mak^2} \sin^2\left(\frac{1}{2}ka\right)},$$

y vemos que ondas con mayor k se propagan más lento.

.15

Roce

- Consideremos una cuerda en un medio viscoso, de manera que exista una fuerza de roce opuesta al desplazamiento transversal.
- A 1er orden en la fuerza de roce, incluimos la fuerza de roce aplicada a un elto de cuerda dx :

$$f_r = -dx\chi \frac{\partial u}{\partial t}.$$

- Un balance de fuerzas sobre un elemento dx da una ecuación de ondas modificada,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ con } c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}.$$

.16

- Consideremos la propagación de una onda monocromática en un medio con roce. Ponemos $u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$, y vemos que la relación de dispersión

$$\frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\chi\omega}{\tau} - k^2 = 0 \text{ es compleja.}$$

- $\Rightarrow k \in \mathbb{C}$, $k = k_R + ik_I$.
- De la relación de dispersión,

$$k_{\pm}^I = -\chi\omega/(2\tau k_{\pm}^R),$$

$$k_{\pm}^R = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \left(\frac{\chi\omega}{c}\right)^2} \right).$$

- Entonces las soluciones de la ecuación de ondas disipativa tienen la forma

$$u = Ae^{-k^I x} e^{i(k^R x - \omega t)}.$$

- Si el medio disipativo está confinado en $x > 0$, es necesario que $k^I > 0$ para evitar divergencia.

.17

4.2. Paquetes de ondas

- La decomposición espectral de una señal es

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp[i(kx - \omega t)] dk,$$

en que $A(k)$ es el ‘espectro’ de u , y también es la transformada de Fourier en $t = 0$.

- Queremos estudiar la propagación de la onda en un medio dispersivo, para $t > 0$.

- Si partimos con un espectro $A(k)$ muy angosto en torno a k_o ,

$$\omega(k) = \omega_o + (k - k_o) \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_o}.$$

- Introduciendo $l \equiv k - k_o$,

$$u(x, t) = \exp[i(k_o x - \omega_o t)] \overbrace{\int dl A(l + k_o) \exp[il(x - v_g t)]}^{\text{envoltura se propaga con velocidad } v_g},$$

con $v_g \equiv \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_o}$.

.18

- Entonces vemos que, modulo un factor armónico (exponencial oscilante),

$$u(x, t) \sim f(x - v_g t),$$

y la señal se propaga con velocidad v_g . Notamos que las ondas monocromáticas, i.e. una sola componente espectral, no pueden transmitir información porque tienen dominio infinito.

- Para el caso de un espectro Gaussiano en $t = 0$,

$$A(k) = \exp(-\alpha^2(k - k_o)^2),$$

$$\Rightarrow \text{(tarea)} u(x, t = 0) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{ik_o x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}},$$

y $\sigma(u)\sigma(A) = 1$, donde σ es la dispersión cuadrática media.

.19

5. Difracción e interferencias