

Parte I

Mecánica de Lagrange

Índice

I	1
1. Coordenadas generalizadas	1
1.1. Constricciones y coordenadas generalizadas	1
1.2. Desplazamientos virtuales	3
2. Ecs. de Lagrange	3
2.1. Principio de d'Alembert	3
2.2. Ecs. de Lagrange	3
3. Principio de mínima acción	4
4. Fuerzas de restricción	5
5. Cantidades conservadas	6
5.1. Símetrías y constantes	6
5.2. Sistemas disipativos	7
5.3. Teoremas de conservación para N partículas	8
6. El sólido rígido	8

1. Coordenadas generalizadas

1.1. Constricciones y coordenadas generalizadas

Sistemas constreñidos y fuerzas de reacción.

- Sistema de N partículas: $3N$ grados de libertad $\{x_i\}_{i=1}^{n=3N}$, 3 direcciones de translación por partícula: $i = (1, 2, 3), (4, 5, 6), \dots, (n - 2, n - 1, n)$.
- En presencia de constricciones el # de grados de libertad es reducido por fuerzas de reacción:

$$\dot{p}_i = F_i^a + R_i, \quad i = 1, \dots, 3N,$$

con p_i i -ésima componente momentum (según x_i), F_i^a fuerza aplicada y R_i fuerza de reacción.

Constricciones holonómicas

- Constricciones holonómicas: se pueden escribir como k ecuaciones,

$$f_j(x_1, \dots, x_n, t) = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

- Ejemplos: partícula constreñida a una superficie 2-D $z = f(x, y)$, o a una curva $\vec{x} = \vec{f}(s)$, doble péndulo planar con largos fijos (dos grados de libertad, θ_1, θ_2).

.4

Constricciones no-holonómicas

- No hay ecuación ligando los $\{x_i\}$. Ejemplo: partícula que resbala en el campo \vec{g} sobre una esfera, $r \geq R$.
- Dentro de las constricciones no-holonómicas están las constricciones no-integrables:

$$\sum_i h_i dx_i = 0.$$

Ejemplo: cilindro que rueda sin resbalar.

.5

Coordenadas generalizadas

- Consideremos N partículas con k constricciones holonómicas: hay $3N - k$ grados de libertad. Elegimos $\{q_i\}_{i=1}^{3N-k}$ coordenadas *independientes* que caracterizan el sistema. $\{q_i\}_{i=1}^{3N-k} \equiv$ coordenadas generalizadas.
- Ejemplos: s en $\vec{x} = \vec{f}(s)$, θ_1, θ_2 en el doble péndulo planar.
- Hay que especificar el tiempo en el caso de constricciones holonómicas tiempo-dependientes.
- Relación con coordenadas cartesianas:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_{n-k}, t), \quad i = 1, \dots, 3N.$$

.6

Estado mecánico.

- Los $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$ son variables independientes que determinan la posición de un sistema. Pero los $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$ no bastan para determinar el **estado mecánico** del sistema, porque para determinar la posición en un instante siguiente se necesitan las velocidades $\{\dot{q}_j\}_{j=1}^{3N-k}$.
- La experiencia indica que dados $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$ y $\{\dot{q}_j\}_{j=1}^{3N-k}$, en t , queda determinado el estado mecánico, lo cual en principio permite predecir el movimiento futuro, suponiendo que se puede resolver el problema mecánico.
- En otras palabras, dados $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$ y $\{\dot{q}_j\}_{j=1}^{3N-k}$ quedan determinados $\{\ddot{q}_j\}_{j=1}^{3N-k}$.
- \Rightarrow Las variables **independientes** de un problema mecánico son

$$\{q_j, \dot{q}_j, t\}, \quad j = 1, \dots, 3N - k.$$

.7

1.2. Desplazamientos virtuales

- Desplazamiento virtual $\{\delta x_i\}_{i=1}^{3N}$: infinitesimal, instantáneo (constricciones fijas), consistentes con constricciones.

$$\delta x_i = \sum_{l=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \delta q_l.$$

.8

2. Ecs. de Lagrange

2.1. Principio de d'Alembert

- “Las fuerzas de constricciones no trabajan en desplazamiento virtuales”.
- \Rightarrow Principio de d'Alembert:

$$\sum_i (F_i^a - \dot{p}_i) \delta x_i = 0. \quad (1)$$

- Notar que en el caso sin constricciones, se reduce a 2da ley de Newton.
- Notar ausencia de fuerzas de reacción.

.9

2.2. Ecs. de Lagrange

- Trabajo de las fuerzas externas en un desplazamiento virtual:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{3N-k} Q_\sigma \delta q_\sigma,$$

con $Q_\sigma \equiv \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}$, fuerza generalizada.

- Introduciendo la energía cinética,

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_i^{3N} m_i \dot{x}_i^2,$$

se puede reescribir el principio de d'Alembert Ec. 1, en las Ecs. de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma, \quad \sigma = 1, \dots, 3N - k. \quad (2)$$

.10

Fuerzas conservativas, Lagrangeano

- Fuerza externa $F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\{x_i\}, t)$, y

$$Q_\sigma = -\frac{\partial}{\partial q_\sigma} V(\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}, t),$$

- Introducimos Lagrangeano, $L = T - V$, y Ec. 2 da la Ec. de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, 3N - k. \quad (3)$$

.11

Ejemplos

- Péndulo.
- Masa en un anillo girando en un plano.
- Estabilidad, bifurcaciones: masa en un anillo girando con eje de rotacion que pasa por su centro y es paralelo a \vec{g} .

.12

3. Principio de mínima acción

Cálculo de variaciones

- Consideremos una función $y(x)$, y $I \equiv \int_{x_1}^{x_2} \phi(y, y', x) dx$, donde ϕ es un funcional de y y y' .
- La función $y(x)$ que extrema I , dado condiciones de bordes fijas en x_1 y x_2 , es solución de las ecuaciones de Euler,

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial y'} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

.13

Principio de Hamilton

- Similitud de Ecs. de Euler, Ec. 4, sugiere que Ecs. de Euler-Lagrange, Ec. 3, derivan de un principio variacional. Para 1-D:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow t \\ y(x) &\longrightarrow q(t) \\ y' &\longrightarrow \dot{q} \\ \phi(y, y', x) &\longrightarrow L(q, \dot{q}, t) \end{aligned}$$

- Definimos la *acción*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

y el principio de mínima acción arroja las Ecs. de Euler-Lagrange, Ec. 3.

.14

Lagrangiano de la partícula libre

- Ppio. de Hamilton \Leftrightarrow formulación fundamental de la mecánica.
- Consideraciones fundamentales en relatividad Galileanaa conducen al Lagrangiano de la partícula libre,

$$L = \frac{1}{2}mv^2.$$

.15

4. Fuerzas de restricción

Modificación de las Ecs. de E.-L.

Tenemos k restricciones:

$$f_j(\{q_\sigma\}, t) = c_j, \quad j = 1, \dots, k \Rightarrow \{q_\sigma\} \text{ no independientes}$$

$$\begin{aligned} \delta f_j &= \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma = 0. \\ \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\sigma=1}^n \delta q_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma} \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma} \end{aligned} \quad (5)$$

En que rotulamos los q_σ independientes con $\sigma = 1, \dots, n - k$. Los otros q_σ no son independientes. Pero elegimos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de manera a que se anulen los coeficientes de $\delta q_{n-k+1}, \dots, \delta q_n$.

.16

Fuerzas de restricción

Comparación de E.L. modificada, Ec. 5 con ecuaciones de Lagrange, Ec. 2,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma, \quad \sigma = 1, \dots, 3N - k.$$

inspira identificar

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} + \underbrace{\sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma}}_{Q_\sigma^r} \quad (6)$$

Ejemplo: péndulo.

.17

5. Cantidades conservadas

5.1. Símetrías y constantes

Constantes de movimientos

- E.L. orden 2 $\Rightarrow 2n - 1$ constantes de integración que se pueden despejar en función de los $\{q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t\}$.
- \Rightarrow La especificación de las ‘constantes de movimiento resuelve en problema mecánica.

.18

Momentum generalizado

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$
$$\text{E.L.} \Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Reconocemos la 2da ley de Newton para el caso de sistemas con $L = T(v^2) - V(\vec{q})$:

$$\dot{p}_i = Q_i,$$

con

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \text{ fuerza generalizada.}$$

.19

Simetrías y constantes

- Si una coord. gen. q_σ no aparece en L , el correspondiente momentum gen. es constante que da la ec. de mov en σ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \Rightarrow \dot{p}_\sigma = 0.$$

- Si $\partial L / \partial q_\sigma = 0$ se dice que q_σ es cíclica.
- $L(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_\sigma}(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)$ y $p_\sigma = \text{Cte}$ entrega una “primera integral”, una relación entre \vec{q} , $\vec{\dot{q}}$, y t .
- Si L es invariante ante alguna transformación continua de coordenadas, asociamos una coordenada generalizada con esa simetría q_σ (ej: z en un sistema con simetría plano-paralela). Entonces $\partial L / \partial q_\sigma = 0$, y p_σ es Cte. \Rightarrow la existencia de una simetría continua implica la presencia de un momentum generalizado conservado.

.20

Ejemplos

- Movimiento 3-D en potencial 1-D función de $z \Rightarrow \dot{p}_x = \dot{p}_y = 0$.
- Movimiento en un potencial central $\Rightarrow p_\phi = \text{Cte}$, correspondiente a la magnitud del momentum angular.
- Simetrías para un sistema cerrado. Homogeneidad del espacio $\Rightarrow L$ no depende de \vec{q} , si no dependería del origen \Rightarrow conservación de momentum lineal y angular.

.21

El Hamiltoniano

$$H \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

- Si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$ en las trayectorias soluciones de la ecuación de movimiento.
- $H = E = T + V$ para sistemas en los cuales ni V ni las constricciones dependen de t .
- H es una función de q_σ y p_σ , es la transformada de Legendre de H en p .

.22

5.2. Sistemas disipativos

- Roca: detalles micro muy complicados \Rightarrow usar prescripción macro:

$$\vec{F}^d = -\vec{k} \cdot \vec{v}\hat{v}.$$

- Para introducir \vec{F}^d en mecánica analítica introducimos la función disipativa de Rayleigh:

$$R = \frac{1}{2} \sum_i k_i \dot{x}_i^2, \text{ donde } F_i^d = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = -k_i \dot{x}_i.$$

- Agregando a las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^d = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}$$

- En coordenadas generalizadas,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0.$$

.23

- Ejemplo: aro que rueda sin resbalar.

.24

5.3. Teoremas de conservación para N partículas

- Homogeneidad de $t \Rightarrow$ Hamiltoniano de un sistema cerrado es cantidad conservada.
- Homogeneidad del espacio \Rightarrow momentum total P_i de un sistema cerrado es conservado,

$$P_i = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i^a}.$$

- El momentum total se anula en el sistema centro de masa,

$$\vec{R} = \sum_a m_a \vec{r}_a / \sum_a m_a.$$

- Isotropía del espacio \Rightarrow momentum angular \vec{L} es cantidad conservada:

$$\vec{L} = \sum_a \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a.$$

.25

6. El sólido rígido

Cuerpo rígido con N partículas, 6 grados de libertad (3 de translación, 3 de rotación) $\Leftrightarrow 3N - 6$ constricciones holonómicas

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{Cte.}$$

.26

Velocidad angular

- Sea \vec{R} el origen de un sistema S ligado al cuerpo, con velocidad $\vec{V} = d\vec{R}/dt$ en un sistema inercial S_o . Las normas de los vectores posiciones del cuerpo son constantes en S , \Rightarrow el cuerpo describe una rotación en S . En S_o , para un punto en el cuerpo

$$\vec{v}_o = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r},$$

donde \vec{r} es medido en S , \vec{v}_o es la velocidad en S_o , y $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular.

- $\vec{\Omega}$ es independiente del origen \vec{R} : si eligimos otro origen \vec{R}' , también ligado al cuerpo, con $\vec{a} = \vec{R}' - \vec{R}$, $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$, y $\vec{v}_o = \vec{V}' + \vec{\Omega}' \wedge \vec{r}'$, entonces

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{a} \quad \text{y} \quad \vec{\Omega} = \vec{\Omega}' \quad (7)$$

- De Ec. 7, vemos que existe un \vec{a} tal que $\vec{V}' = 0$. En este sistema S' el cuerpo describe una rotación pura con un eje de rotación llamado ‘eje instantáneo de rotación’, que pasa por el origen O' , en \vec{R}' .

.27

Tensor de inercia, Lagrangeano

- En S_o , energía cinética: $T = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \int d^3x \rho(\vec{x}) \frac{1}{2} |\vec{v}_o(\vec{x})|^2$.
- Escribiendo T observado en S_o en función de las cantidades medidas en el sistema S ligado al cuerpo, $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_i|^2$.
- Si ubicamos el centro de S en el centro de masa, T se puede escribir

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j, \text{ con } I_{ij} = \sum_{\sigma=1}^N m_{\sigma} (\delta_{ij} r_{\sigma,i}^2 - r_{\sigma,i} r_{\sigma,j}).$$

- Caso continuo, $I_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) [x_i^2 \delta_{ij} - x_i x_j]$.

.28

Propiedades del tensor de inercia

- I_{ij} es simétrico. Toda matriz simétrica se puede diagonalizar. Los autovalores I_1, I_2, I_3 se llaman ‘momentos principales de inercia’, y las direcciones correspondientes del sistema S ligado al cuerpo se llaman los ‘ejes principales de inercia’.
- Trompo asimétrico: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$
- Trompo simétrico: dos momentos iguales.
- Teorema de los ejes paralelos: puede resultar más cómodo calcular I_{ij} en un sistema S' centrado en un origen O' distinto al centro de masa, pero con ejes paralelos a S . Entonces $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$, y

$$I_{ij} = I'_{ij} + M(a_i^2 \delta_{ij} - a_i a_j).$$

- Momentum angular en sistema inercial ligado a C.M.: $L_i = \sum_{a=1}^N m_a (\vec{r}_a \wedge \vec{v}_a) \parallel_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \Omega_k$.
- Notar L y Ω NO paralelos.

.29

Movimiento del trompo libre, Ecuaciones de Euler

- Lagrangeano en el sistema inercial S_o : $L = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j + \text{E.L.} \Rightarrow \dot{L}_k = 0, k = 1, 2, 3$.
- Para pasar a una descripción usando componentes en el sistema ligado al cuerpo usamos

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\text{cuerpo}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A},$$

para cualquier \vec{A} y donde $\vec{\Omega}$ es el vector velocidad rotación angular.

- $\dot{L}_k \Big|_{\text{inercial}} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\text{cuerpo}} = -\vec{\Omega} \wedge \vec{L}, y$

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 &= \Omega_3 \Omega_2 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= \Omega_1 \Omega_3 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) \end{aligned}$$

.30

Oscilaciones del trompo simétrico

- Supongamos que $I_1 = I_2 \neq I_3 \Rightarrow \Omega_3 = \text{Cte}$, y

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1 &= -A\Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 &= A\Omega_1, \text{ con } A = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_1.\end{aligned}$$

- Vemos que Ω_1 y Ω_2 ejecutarán oscilaciones armónicas. Si en $t = 0$, $\vec{\Omega}$ está en el plano (\hat{e}_1, \hat{e}_2) , formando un ángulo θ con \hat{e}_3 ,

$$\begin{aligned}\Omega_1(t) &= \Omega \sin(\theta) \cos(At) \\ \Omega_2(t) &= \Omega \sin(\theta) \sin(At) \\ \Omega_3(t) &= \Omega \cos(\theta) \text{ Cte.}\end{aligned}\tag{8}$$

- En el caso del planeta Tierra, $\theta \sim 6 \cdot 10^{-7}$ rad o un desplazamiento de 4 m del polo Norte, y $A \sim \Omega/305$, i.e. una precesión de 305 días.