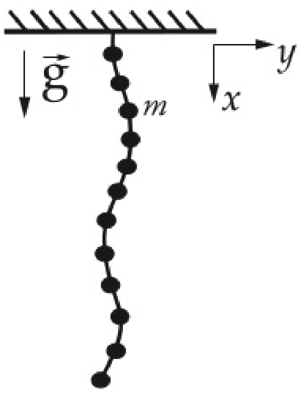
FI3001 **Tarea 2** Prof: Simon Casassus

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Cuerda colgando.



Consideramos un sistema de N partículas de masa m, separadas por una distancia a y sujetas a una cuerda sin masa. La cuerda cuelga en gravedad.

1. `( 1.5 pt)`n Encuentre el sistema de ecuaciones que describen el movimiento de las masas en el caso de pequeños desplazamientos de la cuerda relativo a la vertical.

2. `( 2 pt)` Muestre que en el límite continuo, en que $a \to 0$ y $N \to \infty$, con $Na = L$ constante, se obtiene una ecuación de ondas modificada

$$\frac{\partial y}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left((L-x)(\frac{\partial y}{\partial x})\right). \tag{1}$$

3. Consideramos ahora la cuerda colgante en el caso continuo.

   a) `( 1 pt)` Deduzca Ec. 1 del caso continuo directamente.

   b) `( 1 pt)` ¿Qué condiciones de borde cumple la cuerda?

   c) `( 0.5 pt)` ¿Cómo se modifican la ecuación Ec. 1 y las condiciones de borde si en el extremo inferior de la cuerda se cuelga un cuerpo de masa $M_\circ$?

II Equivalencia entre d'Alembert y Bernouilli para extremos fijos.

1. `( 1.5 pt)` Muestre que una solución general para la ecuación de ondas, con condición inicial $u(x,0) = f(x)$ y $\dot{u}(x,0) = g(x)$, esta dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x')dx'. \tag{2}$$

Esta es la solución de d'Alembert.

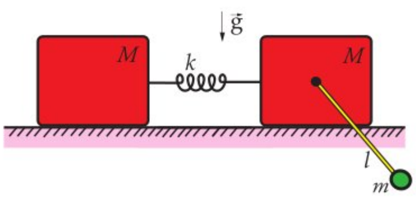
2. `( 1.5 pt)` También muestre que se puede escribir la solución de Bernouilli (i.e. en modos normales), $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$, o bien

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ &\quad [a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)], \end{aligned}$$

donde, $a_n = C_n \cos(\phi_n),\ b_n = -C_n \sin(\phi_n)$.

3. `( 3 pt)` Muestre que ambas soluciones son equivalente. Ayuda: expanda d'Alembert para extremos fijos en serie de Fourier, y use $\int_0^l \rho_n(x)\rho_m(x)\sigma dx = \delta_{nm}$.

III Pequeñas oscilaciones.



Considere un sistema compuesto por dos bloques de masa M , conectados entre si por un resorte de constante elástica k, que deslizan sobre una superficie horizontal sin roce. Sobre uno de los bloques cuelga, desde su centro, un péndulo de largo l y masa m, como se ilustra en la Figura.

1. `( 2 pt)` Encuentre el lagrangeano de pequeñas oscilaciones.
2. `( 2 pt)` Calcule las frecuencias propias del sistema si $g/l = k/M = \omega_\circ$.
3. `( 2 pt)` Obtenga los modos normales de oscilación, y descríbalos cualitativamente.